

ვექტორები

გზამკვლევი

მომზადდა ეკა კორძაძემ

გზამკვლევაში გაეცნობით მასალებს ვექტორების შესახებ და ვექტორებთან დაკავშირებული მთელი რიგი საკითხების სწავლების მეთოდურ ორიენტირებს. რაც დაეხმარება მასწავლებლებს დააძლევინონ მათ მოსწავლეებს სირთულეები ვექტორების შესწავლისას. ვექტორის ცნება მნიშვნელოვან როლს თამაშობს არა მარტო მათემატიკაში, არამედ მომიჯნავე ფუნდამენტურ მეცნიერებებში, კერძოდ ფიზიკაში, კომპიუტერულ გრაფიკაში. გზამკვლევაში განხილულია: **ვექტორები, სიბრტყის გარდაქმნები და მათი გამოყენება; ვექტორის ცნება; ვექტორთა შეკრება; ვექტორის რიცხვზე გამრავლება; ვექტორთა ალგებრა; ვექტორების წარმოდგენა სტანდარტულ ბაზისში; ვექტორების წარმოდგენა ნებისმიერ ბაზისში; ვექტორთა პროექცია; სიბრტყის გარდაქმნები; ვექტორთა მობრუნება; ვექტორები და ტრიგონომეტრიული ფუნქციები; ვექტორთა სკალარული ნამრავლი; ვექტორების გამოყენება ამოცანების ამოხსნისას; ვექტორული სივრცეები.**

სარჩევი

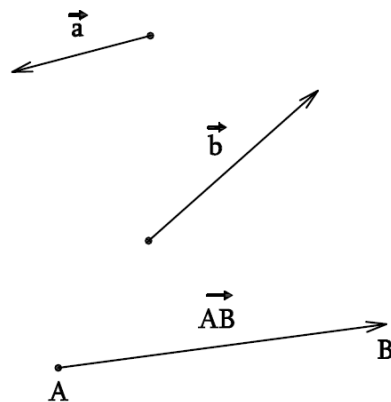
ვექტორები, სიბრტყის გარდაქმნები და მათი გამოყენება	2
ვექტორის ცნება.	2
ვექტორთა შეკრება.	8
ვექტორის რიცხვზე გამრავლება.	15
ვექტორთა ალგებრა.	20
ვექტორების წარმოდგენა სტანდარტულ ბაზისში.	21
.....	22
ვექტორების წარმოდგენა ნებისმიერ ბაზისში.....	22
ვექტორთა პროექცია.....	24
სიბრტყის გარდაქმნები.....	26
ვექტორთა მობრუნება.	29
ვექტორები და ტრიგონომეტრიული ფუნქციები.	30
ვექტორთა სკალარული ნამრავლი	33
ვექტორების გამოყენება ამოცანების ამოხსნისას.....	34
ვექტორული სივრცეები.....	37

ვექტორები, სიბრტყის გარდაქმნები და მათი გამოყენება

1. შესავალი. სკოლის მოსწავლეები ხშირად აწყდებიან სიძნელეებს ვექტორების შესწავლისას, მაშინ როდესაც ვექტორის ცნება მნიშვნელოვან როლს თამაშობს არა მარტო მათემატიკაში, არამედ მომიჯნავე ფუნდამენტურ მეცნიერებებში, კერძოდ ფიზიკაში, და ასევე პრაქტიკაში, მაგალითად კომპიუტერულ გრაფიკაში. ისევე როგორც სხვა მათემატიკური ცნებების შესწავლისას, თუ რამდენად კარგად გაიგებს, გაიაზრებს და გაითავისებს მოსწავლე ვექტორებს, უადრესადაა დამოკიდებული იმ ფაქტზე, თუ რამდენად ღრმად და სრულყოფილად ფლობს მასწავლებელი ამ ცნებას. დაუშვებელია მასწავლებლის შინაარსობრივი წვდომა რაიმე საკითხისა ამოიწურებოდეს მხოლოდ იმ ინფორმაციით, რაც მან გაკვეთილების მსვლელობისას უნდა მიაწოდოს თავის მოსწავლეებს აღნიშნული საკითხის შესახებ. თუ რამდენად კარგად გაართმევს თავს მასწავლებელი დასახულ ამოცანას, დაეუფლოს მოსწავლე სასწავლო პროგრამით განსაზღვრულ მასალას, ინდივიდუალური მიდგომებისა და სხვადასხვა მეთოდის გამოყენებასთან ერთად, გადამწყვეტ როლს თამაშობს მასწავლებლის მიერ თავად მათემატიკის ცოდნის დონე და ხარისხი. მათემატიკური "ცოდნის კიბე", ისევე როგორც ნებისმიერი ცოდნის სიღრმე, შემოუსაზღვრელია და მათემატიკის მასწავლებელი მუდამ უნდა ცდილობდეს ერთი საფეხურით მაღლა აიწიოს ამ კიბეზე. ზემოთ ნახსენები სათაურის მქონე თემის მიმოხილვისას, ასევე ამ თემასთან მომიჯნავე მნიშვნელოვანი საკითხების განხილვით, ჩვენ შევეცდებით დავაზუსტოთ და გავაღრმავოთ არსებული ცოდნა ვექტორების შესახებ, გავზარდოთ ამ ცოდნის გამოყენების არეალი, აღმოვფხვრათ ბუნდოვანი ადგილები და მივუთითოთ ის ფორმები და მეთოდები, რითაც ეს ცნებები შეიძლება მიეწოდოს მოსწავლეებს სწავლების სხვადასხვა საფეხურზე.

ვექტორის ცნება

ვექტორის ცნებად დასაწყის ეტაპზე მასწავლებელმა შეიძლება გამოიყენოს მისი თვალსაჩინოება: "ვექტორი ეს არის მიმართული მონაკვეთი" და ნიმუშად დაფაზე დახატოს რამოდენიმე ვექტორი, ვთქვათ $\vec{a}$, $\vec{b}$, და ასე შემდეგ.

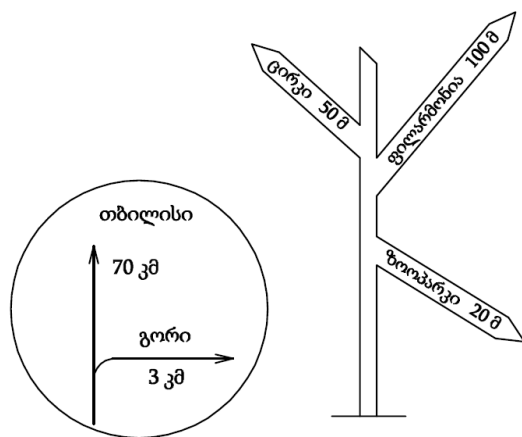


მაგრამ მასწავლებელმა კარგად უნდა იცოდეს, რომ ვექტორი არ არის გეომეტრიული ფიგურა, როგორც თავად მონაკვეთი (როგორც ვიცით, ფიგურა არის წერტილთა სიმრავლე

და ვექტორი არ წარმოადგენს ასეთ სიმრავლეს. ვექტორის ზუსტ განსაზღვრებაზე

მოგვიანებით ვისაუბრებთ). მოსწავლეთათვის გასაგებ ენაზე უნდა ავხსნათ, რომ ამგვარი წარმოდგენით ვექტორს გააჩნია საწყისი და საბოლოო წერტილები, რომლებიც ცალსახად განსაზღვრავენ ვექტორს (ვექტორი საწყისი წერტილით A და საბოლოო წერტილით B , როგორც წესი, აღინიშნება $\overrightarrow{AB}$ -თი. მოგვიანებით ვნახავთ, რომ საწყისი და საბოლოო წერტილები შეიძლება დაემთხვენ კიდეც, რითაც მივიღებთ ნულოვან ვექტორს. ამ ეტაპზე ნულოვანი ვექტორის ხსენებისგან ჯობია თავი შევიკავოთ, რაგან ეს მოსწავლეებისთვის შეიძლება გაუგებარი იყოს). ამგვარად, ვექტორის ძირითადი მახასიათებლებია სიგრძე, გამოხატული რაიმე დადებითი რიცხვით ($\vec{a}$ ვექტორის სიგრძე აღინიშნება a -თი ან $|\vec{a}|$ -თი), და მიმართულება. მკაფიოდ უნდა აღინიშნოს განსხვავება, რომ ყველა სხვა სიდიდე, რაც კი მანამდე მათემატიკის გაკვეთილებზე განიხილებოდა, როგორიცაა სიგრძე, ფართობი, მოცულობა, კუთხის გრადუსული ზომა, დრო, ტემპერატურა, და ა.შ. მხოლოდ რიცხვითი მნიშვნელობით ხასიათდებოდა, მაშინ როცა ვექტორის განსაზღვრისთვის გვჭირდება მისი მიმართულებაც.

ნახ.2



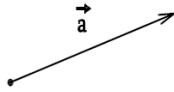
გარდა მარტივი საყოფაცხოვრებო მაგალითებისა, სადაც მიმართული ისრები, შესაბამის რიცხვით მნიშვნელობებთან ერთად, გამოიყენება საჭირო ორიენტაციების დასადგენად, საჭიროა მოსწავლეებს ავუხსნათ მათემატიკური ვექტორის ბუნებაში არსებული პროტოტიპები გადაადგილება და ძალა, რომლებიც ფიზიკაში შეისწავლება. ისევე როგორც, ვთქვათ, წერტილი ან წრფე წარმოადგენს ფიზიკური პატარა ნაწილაკის ან სივრცეში გავრცელებული სინათლის სხივის მათემატიკურ

აბსტრაგირებას, ასევეა ვექტორი ძალისათვის ან გადაადგილებისათვის. ამ ფაქტზე განსაკუთრებული ყურადღება უნდა გამახვილდეს, რადგან ფიზიკურ რეალობაში არსებული ძალების და გადაადგილებების წარმოდგენა დაგვჭირდება ვექტორთა თვისებების უფრო ღრმად შესწავლის დროსაც. საჭიროა კონკრეტული მაგალითების დემონსტრირება, სადაც მოცემული მანძილით გადაადგილებისას ან ძალის გამოყენებით სხეულზე გავლენის მოხდენისას, მნიშვნელოვანი იქნება არა მარტო ვექტორის სიგრძის რიცხვითი მნიშვნელობა, არამედ მისი მიმართულებაც.

მეორე ნაბიჯად ვექტორის ცნების შესწავლისას გვესახება მასწავლებლის მიერ შემდეგ კითხვაზე პასუხის გაცემა. "განვიხილოთ რაიმე $\vec{a}$ ვექტორი და შევეცადოთ დავინახოთ თუ რა მოხდება თუკი სიბრტყის წერტილებს გადავითანთ ამ ვექტორის მიმართულებით მისი

სიგრძის ტოლ მანძილზე” მოსწავლეს წინა კლასებში უკვე განხილული ექნება სიბრტყის გარდაქმნის მარტივი მაგალითები: ღერძული სიმეტრია, ცენტრული სიმეტრია, პარალელური გადატანა (ჩვენ სიბრტყის გარდაქმნებს უფრო დაწვრილებით

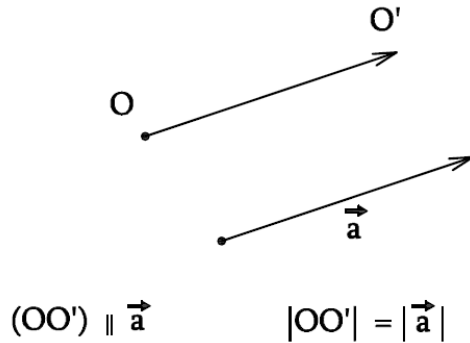
ნახ.3



ვექტორით გადატანისას.

განვიხილავთ მოგვიანებით) და მასწავლებელმა უნდა შეახსენოს მოსწავლეებს, რომ სწორედ ამ უკანასკნელთან გვაქვს საქმე, როცა ვექტორის საშუალებით წარმოვიდგენთ ზემოხსენებულ მოძრაობას. შეიძლება თვალსაჩინოებისათვის რვეული გავასრიალოთ მერხის ზედაპირზე ან დაფაზე, ან დავხატოთ რაიმე ფიგურა და დავაკვირდეთ, როგორ შეიცვლება მისი მდებარეობა

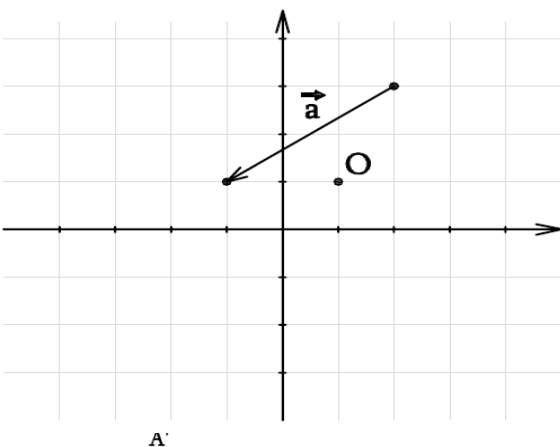
ნახ.4



ამ მოსამზადებელი ხასიათის ახსანა-განმარტებითი სამუშაოს ჩატარების შემდეგ უკვე მოსწავლეებმა უნდა შეძლონ შემდეგი, ერთი შეხედვით მარტივი, მაგრამ უადრესად მნიშვნელოვანი სავარჯიშოს დამოუკიდებელად (მასწავლებლის დახმარებით, მთელი კლასისთვის პროცესის კითხვა-პასუხის რეჟიმში წარმართვით) შესრულება: “გადავდოთ მოცემული ვექტორი მოცემული წერტილიდან”. ე.ი. როდესაც

მოცემულია O წერტილი და $\vec{a}$ ვექტორი, მიმართული მონაკვეთის (ანუ ვექტორის) გამოხატვით ვაჩვენოთ რა მოძრაობას შეასრულებს O წერტილი $\vec{a}$ ვექტორის გასწვრივ გადატანისას (საჭიროა ზუსტი განმარტების ხსენებაც, რომ $(OO') \parallel \vec{a}$ და $|OO'| = |\vec{a}|$). აქ მასწავლებელს შესაძლო კითხვების დიდი მრავალფეროვნება აქვს ვექტორის მიმართულებისა და წერტილის მდებარეობის შერჩევით და მან მრვალჯერ უნდა გაამეორებინოს მოსწავლეებს ამ ამოცანის ამოხსნა. შეიძლება მოსწავლეთათვის უფრო სახალისო აღმოჩნდეს ამგვარ კითხვაზე პასუხის გაცემა, როდესაც სიბრტყე დაფარულია

ნახ.

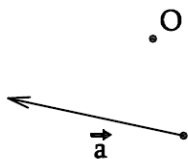


კოორდინატთა ბადით. ცხადია ჯობია ვექტორის საწყისს და საბოლოო წერტილებს და O წერტილსაც ჰქონდეთ მთელი კოორდინატები (არ არის სავალდებულო $\vec{a}$ გადადებული იყოს კოორდინატთა სათავიდან). ამ დროს მოსწავლეებს შეეძლებათ არა მარტო დახატონ სწორი პასუხი, არამედ O' წერტილის კოორდინატებიც დაასახელონ. ამასთან მოსწავლეებმა ეს ამოცანა უნდა ამოხსნან წმინდა ევრისტიკული მოსაზრებებით ყოველგვარი მსჯელობებისა და

დასაბუთებების გარეშე. მთავარია სწორი იყოს საბოლოო პასუხი. თუკი მოსწავლეთა ერთ ნაწილს მოეჩვენება, რომ ეს სავარჯიშოები ერთფეროვან სახეს იღებს, მასწავლებელმა მათ უნდა აუხსნას, რომ სულ ცოტა ხანში მათ დასჭირდებათ მოცემული ვექტორის გადაღება მოცემული წერტილიდან გაცილებით რთულ ვითარებებში (იგულისხმება ვექტორების შეკრება, ვექტორის ცნების დაზუსტება, და ა.შ.) და ამისთვის საჭიროა მოსამზადებელი ეტაპების სრულყოფილი გააზრება, რათა მოგვიანებით სიძნელეებმა არ იჩინონ თავი.

ამოცანას ოდნავ გავართულებთ, თუკი ერთიდაიმავე სურათზე ერთიდაიგივე $\vec{a}$ ვექტორს გადავღებთ სხვადასხვა წერტილიდან, რაც უკვე თითოეულმა მოსწავლემ უნდა შეძლოს. ამ ეტაპის დასასრულს დავსვამთ კითხვას, რითაც შევეცდებით მივუახლოვდეთ ვექტორის ზუსტი მათემატიკური ცნების ჩამოყალიბებას: *“როდესაც მოცემული გვაქვს რაიმე $\vec{a}$ ვექტორი, სიბრტყის წერტილებს შორის რა ბუნებრივ კავშირს (შესაბამისობას) ამყარებს ეს ვექტორი?”* ეს კითხვა გამოდგება ქვაკუთხედად, რათა მოსწავლეებმა ერთობლივად იმსჯელონ, გამოთქვან საკუთარი ვარაუდები, დააზუსტონ ინტუიციური გამონათქვამები, და საბოლოოდ, მიახლოებით მაინც, ჩამოაყალიბონ პასუხი მასწავლებლისგან დამოუკიდებლად (მასწავლებელი კითხვების დახმარებით აქტიურად უნდა მართავდეს სიტუაციას): სიბრტყის ყოველ A წერტილს ცხადად განსაზღვრული წესით შეესაბამება A' წერტილი, კერძოდ A წერტილიდან გადაღებული $\vec{a}$ ვექტორისთვის A' იქნება ბოლო წერტილი. ამგვარი აქტივობით მოსწავლეები შემზადებულნი არიან რათა მათ შევახსენოთ, რომ ამგვარი შესაბამისობისათვის მათემატიკაში არსებობს დაზუსტებული ტერმინი *“ფუნქცია”*. მაშასადამე, სიბრტყეზე აღებული ვექტორი ყოფილა ფუნქცია, რომელიც სიბრტყის ყოველ A წერტილს უთანადებს იმ ერთადერთ A' წერტილს რომლისთვისაც A -დან A' -სკენ მიმართულება ემთხვევა $\vec{a}$ -ს მიმართულებას, ხოლო $|\overline{AA'}| = |\vec{a}|$ (უდავოდ ფუნქციის ცნება ცენტრალურია სასკოლო მათემატიკის პროგრამაში და მოგვიანებით ცალკე განვავრცობთ ამ თემას). ჩვენ შორს ვართ იმ აზრისაგან, რომ ყველა მოსწავლე მიხვდება, თუ რატომ არის ვექტორი ფუნქცია (თუმცა მასწავლებელს კარგად უნდა ესმოდეს ეს ფაქტი). მასწავლებელს შეუძლია არც გაამახვილოს ყურადღება ვექტორის ამ მკაცრ განმარტებაზე, რადგან ფუნქციის ცნება, როგორც წესი, რთულია მოსწავლეთათვის.

ნახ.6



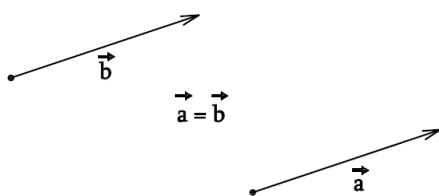
პირიქით, მან უნდა გამოიყენოს ვექტორის ცნება, რათა მოსწავლეებს შეახსენოს და გაუღრმავოს მათში არსებული ცოდნა ფუნქციის შესახებ. რამდენადაც ფორმულა $y = 2x + 5$ განხილული როგორც ფუნქცია ამყარებს შესაბამისობას (კავშირს) რიცხვებს შორის (ვთქვათ 3-ს უთანადებს 11-ს), იმდენადვე მიმართული მონაკვეთი (ვექტორი) განხილული როგორც

ფუნქცია ამყარებს შესაბამისობას სიბრტყის წერტილებს შორის (ზემოთ ნახსენები წესით). საბოლოო ჯამში საკმარისია მოსწავლეებმა შეძლონ ნახაზის მოშველიებით უპასუხონ შემდეგ კონკრეტულ კითხვას: *“ვთქვათ მოცემულია $\vec{a}$ ვექტორი და O წერტილი. სიბრტყის რომელი O' წერტილი შეესაბამება O წერტილს? ცხადია ვგულისხმობთ, რომ ცალკე ეს კითხვა (გაკვეთილის კონტექსტიდან ამოგლეჯილი) გაუგებარი იქნება მოსწავლეთა აბსოლუტური უმრავლესობისათვის, მაგრამ იმედია უკვე ჩატარებული*

ახსნა განმარტებების ფონზე მოსწავლეთა უმრავლესობა შეძლებს სწორი პასუხი გასცეს ამ კითხვას (შეიძლება არსის ბოლომდე გააზრების გარეშეც, ისე როგორც ფუნქციის თემის ახსნისას მოსწავლეთა უმრავლესობა ხვდება, რომ $f(x) = 2x + 5$ ფუნქცია 3-ს უთანადებს 11-ს, თუმცა უჭირს ბოლომდე ფუნქციის ცნების გააზრება). თანაც საკმარისია ამგვარი ამოცანა ერთჯერადად ამოიხსნას კლასში.

აქვე შეგვიძლია ვახსენოთ ნულოვანი ვექტორი: *“ვექტორს, რომლის საწყისი და საბოლოო წერტილები ერთმანეთს ემთხვევა, ეწოდება ნულოვანი ვექტორი”*. მისი გამოხატვა ერთი წერტილით და აღნიშვნა $\vec{0}$ -თი მოსწავლეთათვის მისაღები უნდა იყოს ($\vec{0}$ -ის სიგრძე ნულია და მისი მიმართულება განუსაზღვრელია, არა აქვს), მაგრამ გარდა ამისა მასწავლებელს სრულყოფილად უნდა ჰქონდეს გათვითცნობიერებული, რომ ნულოვანი ვექტორი, როგორც ფუნქცია, სიბრტყის ყოველ წერტილს უთანადებს თავის თავს, ანუ იგივეური ფუნქციაა. ცოდნას ნულოვანი ვექტორის შესახებ უფრო განვამტკიცებთ, როცა ავხსნით ვექტორთა შეკრებას.

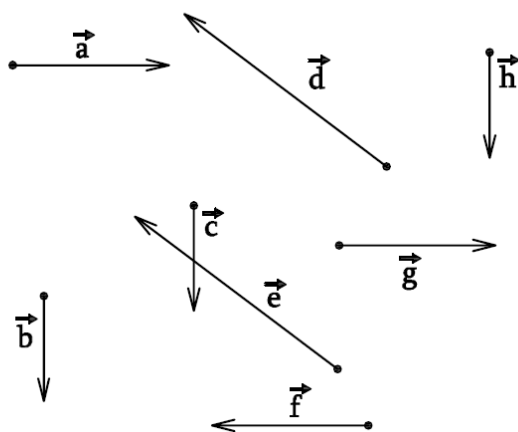
ნახ.8



შემდეგ ეტაპზე შემოდის კიდევ ერთი მნიშვნელოვანი ცნება *ვექტორთა ტოლობა*, რომელიც უშუალოდ უკავშირდება ვექტორებზე უკვე შექმნილ წარმოდგენებს. *“ორ ვექტორს ეწოდებათ ტოლი, თუ მათი მიმართულება ერთიდაიგივეა და სიგრძე ტოლია”*, ანუ სხვა ენაზე ორი ტოლი ვექტორის

გამოსახვა (მიმართული მონაკვეთებით), მათი ერთიდაიგივე წერტილიდან გადადებისას ერთმანეთს ემთხვევა (მოსწავლეები კარგად უნდა ხედავდნენ მასწავლებლის დახმარებით, რომ ეს ორი განმარტება ექვივალენტურია). ვექტორთა ტოლობის ახსნისას მასწავლებელმა ხაზი უნდა გაუსვას, რომ მათემატიკაში ვექტორის განხილვისას მნიშვნელობა აქვს მხოლოდ მის სიგრძეს და მიმართულებას და სულერთია მას რომელი წერტილიდან გადავდებთ (ვითარება შეიძლება ოდნავ განსხვავებული იყოს ფიზიკაში, სადაც მაგალითად გადაადგილების განხილვისას ზოგჯერ მნიშვნელობა ენიჭება

ნახ.9

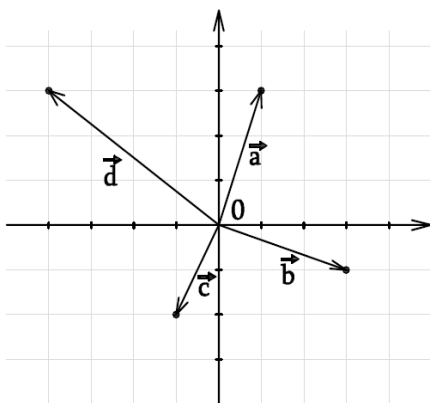


ზუსტად რომელ წერტილში დაიწყო მოძრაობა და რომელ წერტილში დამთავრდა. ასეთ შემთხვევაში ხანდახან ვექტორებს ბმულ ვექტორებს უწოდებენ). მასწავლებელს უნდა კარგად ჰქონდეს გააზრებული ისიც, რომ ვექტორთა ტოლობის ამგვარი განმარტება სრულად ეთანხმება

ვექტორის ზუსტ მათემატიკურ განსაზღვრას ფუნქციების მეშვეობით, რაზედაც ზემოთ იყო საუბარი. ცხადია ტოლი ვექტორები, განხილული როგორც ფუნქციები, სიბრტყეზე განსაზღვრულ ერთიდიამავე შესაბამისობას წარმოადგენენ. სავარჯიშოდ მასწავლებელმა მოსწავლეებს შეიძლება დაუსვას ასეთი ამოცანა: *“მოცემულ ნახატზე ამოვარჩიოთ ტოლი ვექტორები”*.

როდესაც მოსწავლეები გაითავისებენ, რომ ვექტორთა განხილვისას მნიშვნელობა არა აქვს თუ რომელი წერტილიდან გადავდებთ ამ ვექტორს, ამ თემაზე პირველი გაკვეთილის დასასრულს, მასწავლებელმა შეიძლება შემოიტანოს რადიუს-ვექტორის ცნება, ანუ მოსწავლეებს აუხსნას, რომ ვექტორების თვისებების შესწავლისას ხშირად

ნახ.10



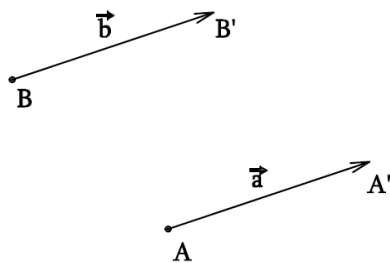
მოსახერხებელია ეს ვექტორები წარმოვიდგინოთ ერთი წერტილიდან გადადებული. ამისთვის ბუნებრივია სიბრტყეზე დავხატოთ საკოორდინატო ბადე და ეს წერტილი იყოს კოორდინატთა სათავე O . ამრიგად, თუ ვიგულისხმებთ, რომ ყველა ვექტორი გადადებულია O წერტილიდან, მაშინ საკმარისია დავასახელოთ ვექტორის მხოლოდ ბოლო

წერტილი (მისი კოორდინატები), რომ ეს ვექტორი ცალსახად იქნება განსაზღვრული. თავად ვექტორს ამგვარი სახით გამოხატულს რადიუს-ვექტორს უწოდებენ. კარგი იქნება თუ სავარჯიშოდ მასწავლებელი დაუსვამს მოსწავლეებს ამგვარ ამოცანას (იხ. ნახ. 10): *“ვიპოვოთ თითოეული რადიუს-ვექტორის ბოლო წერტილის კოორდინატები”* (მოგვიანებით ამ კოორდინატებს დავარქმევთ ვექტორის კოორდინატებს). მოსწავლეებმა უნდა იგრძნონ, რომ რამდენი წერტილიც გვაქვს სიბრტყეზე იმდენი რადიუს-ვექტორის დახატვა შეიძლება და პირიქითაც, ყოველი რადიუს-ვექტორი ცალსახად მონიშნავს სიბრტყეზე გარკვეულ წერტილს. მასწავლებელმა უნდა იცოდეს, რომ ეს არის ბუნებრივი ურთიერთცალსახა შესაბამისობა სიბრტყის წერტილებსა და ვექტორებს (იგივე რადიუს-ვექტორებს) შორის. მოსწავლეებს შეიძლება ეს ავუსხნათ შემდეგი ტერმინების გამოყენებით, რომ თითოეულ ვექტორს დავარქვათ თავისი “სახელი”. მაგალითად $\vec{d}$ იყოს $(1; 3)$, $\vec{b}$ იყოს $(-1; -2)$, და ა. შ. და აქვე მათ ვუწოდოთ ვექტორის კოორდინატები. თუ ვახსენებთ $(-4; 3)$ ვექტორს, ანუ ვექტორს კოორდინატებით $(-4; 3)$, ე.ი. ლაპარაკია $\vec{d}$ ვექტორზე. (ვექტორის კოორდინატებში ჩაწერის დროს მოსწავლეებში ტიპიური შეცდომაა, რომ $(-4; 3)$ ვექტორი ჰგონიათ OX ღერძის -4 და 3 წერტილების შემაერთებული ვექტორი). ხაზგასმით უნდა აღინიშნოს, რომ თუ ვექტორი არ არის გადადებული საკოორდინატო სიბრტყის სათავიდან და გვეკითხებიან მის კოორდინატებს (მასწავლებელმა ჯობია პირდაპირ დასვას ასეთი ამოცანა), მაშინ ჯერ ეს ვექტორი უნდა გადავდოთ სათავიდან (ანუ ავაგოთ შესაბამისი

რადიუს-ვექტორი) და შემდეგ ვიპოვოთ აგებული ვექტორის ბოლო წერტილის კოორდინატები.

ვექტორთა შესწავლის გზაზე ჩამოყალიბებული ტერმინები (საწყისი წერტილი, საბოლოო წერტილი, სიგრძე, მიმართულება) კარგად იყრის თავს მოპირდაპირე ვექტორის ცნების ჩამოყალიბებაში: "ვექტორი, რომელსაც აქვს იგივე სიგრძე და საპირისპირო მიმართულება", სათანადო განმარტებებთან ერთად საწყის და საბოლოო წერტილების შესახებ. ვინაიდან მოსწავლეთათვის მოპირდაპირე მიმართულება ყოფაცხოვრებიდან ნაცნობი ტერმინია, მათ არ უნდა გაუჭირდეთ ამ ახალი ცნების ათვისება ვექტორების შემოტანასთან ერთად. თითოეულმა მოსწავლემ უნდა შეძლოს მოცემული ვექტორის მოპირდაპირე ვექტორის დახატვა. ამასთანავე მასწავლებელთან ერთად უნდა გაეცეს პასუხი ასეთ კითხვასაც ნახატის გარეშე: "რა იქნება $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის მოპირდაპირე ვექტორი?" (ცხადია $\overrightarrow{BA}$, მაგრამ მოვითხოვთ პატარა დასაბუთებაც). დავსვათ ასეთი ამოცანაც (გაკვეთილზე ან დავალებად), რომ მოცემულია ვექტორის კოორდინატები (ვთქვათ $(-3; 4)$) და ვიპოვოთ მოპირდაპირე ვექტორის კოორდინატები (პასუხი $(3; -4)$).

მიგვაჩნია, რომ ამით უნდა ამოიწუროს მოსწავლეებთან ვექტორებზე ჩატარებული



პირველი გაკვეთილი და მათ გაკვეთილზე შეგროვილი ცოდნა-გამოცდილება უნდა დამოუკიდებლად განიმტკიცონ დავალებად მიცემული ამოცანების შესრულებით. მასწავლებელს შეუძლია ეს ამოცანები შეარჩიოს სახელმძღვანელოდან თემის განხილვისას ჩამოყალიბებული კითხვების ნიმუშების მიხედვით. თუკი დრო ამის საშუალებას მოგვცემს, შეიძლება ზოგიერთი ამოცანის ამოხსნა კლასშივე დავიწყოთ. მაგალითად: "ვაჩვენოთ, რომ თუ $\vec{a} = \vec{b}$, (იხ. ნახ. 11) მაშინ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$." ამ ამოცანის ამოხსნა მოსწავლეთათვის

ვექტორების გაგების გზაზე ახალი გადადგმული ნაბიჯი იქნება და იმის საშუალებაც იქნება რათა მათ რამოდენიმე საჭირო გეომეტრიული ფაქტიც შევახსენოთ (კერძოდ წრფეების პარალელობის ნიშნები, სამკუთხედის ტოლობის ნიშნები). თუკი დრო არ გვეყოფა შეიძლება უბრალოდ მივანიშნოთ, რომ ეს ამოცანა ექვივალენტურია პარალელოგრამის ცნობილი თვისების: "თუ ოთხკუთხედში მოპირდაპირე გვერდები პარალელურია და ტოლია, მაშინ ეს ფიგურა პარალელოგრამია" და დავავალოთ მოსწავლეებს გაიხსენონ ამ თვისების დამტკიცება.

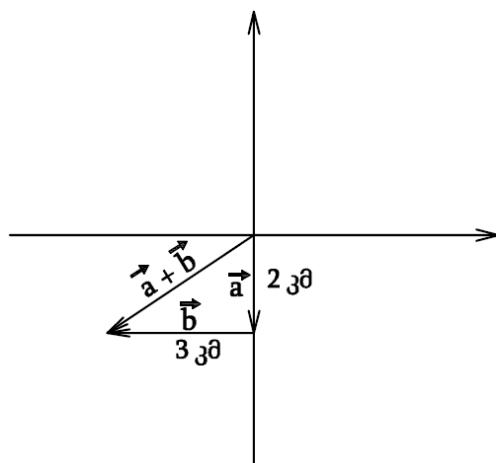
ვექტორთა შეკრება

ვექტორების შეკრების და რიცხვზე გამრავლების ოპერაციების გაგება და ათვისება ფუნდამენტურია ვექტორთა შესწავლისას. ეს არის ის მინიმალური, მაგრამ აუცილებელი ცოდნა, რაც ყველა მოსწავლეს უნდა გააჩნდეს ვექტორების შესახებ ზოგადსაგანმანათლებლო სკოლის დამთავრებისას. ამ ოპერაციების შესწავლით

მოსწავლე არა მარტო სწავლობს კონკრეტულ ფაქტებს მათემატიკიდან, არამედ ეჩვევა თვითონ ოპერაციის, როგორც ცნების გააზრებას. მყარდება მნიშვნელოვანი კავშირი ალგებრასა და გეომეტრიას შორის. ეს სინთეზი უმაღლეს მათემატიკაში გვევლინება მათემატიკის ერთ-ერთი დარგის "წრფივი ალგებრის" სახით, რომლის მოკლე მიმოხილვასაც მასწავლებელთათვის სტატიის დასასრულს მოვიყვანთ.

მოსამზადებელ სამუშაოდ ვექტორის ცნებასთან ერთად მოსწავლეებს უნდა შევახსენოთ, რომ

ნახ.12

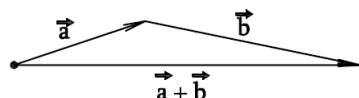


აქამდე მხოლოდ რიცხვების შეკრება და გამრავლება შეგვეძლო და ზოგადად ვუხსენოთ, თუ რომელი ახალი ოპერაციების შესწავლას ვაპირებთ. ხაზი უნდა გავუსვათ, რომ რიცხვების შეკრებისა და გამრავლებისას მათგან გარკვეული წესის მიხედვით

ვღებულობთ ახალ რიცხვებს. მოცემული ობიექტებიდან რაიმე სხვა ობიექტის შედგენა ოპერაციის ზოგადი თვისებაა. მასწავლებლებს შევახსენებთ, რომ სიმრავლეთა თეორია საშუალებას იძლევა თავად ოპერაციის ცნების ზუსტი განსაზღვრისა ფუნქციების ტერმინებში. (იხ. ბოლო ქვეთავი სტატიისა "ფუნქციები").

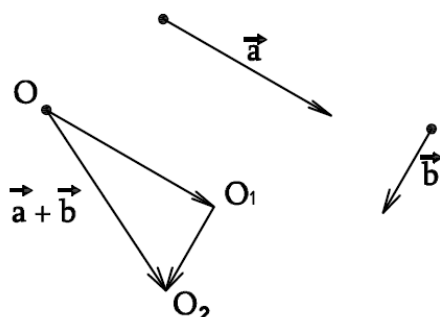
ზუსტი წესების ჩამოყალიბებამდე რამდენიმე მარტივი სიტუაცია განვიხილოთ ფიზიკიდან, რათა მოსწავლეებმა ვექტორთა შეკრება ბუნებრივ პროცესად აღიქვან: მაგ., "ტურისტი გადაადგილდა სამხრეთით 2 კმ-ით და შემდეგ დასავლეთით – 3 კმ-ით. საკოორდინატო სისტემაზე ვექტორით გამოხატეთ ის გადაადგილება, რაც საბოლოო ჯამში ტურისტმა შეასრულა". ამგვარი ამოცანების განხილვისას მასწავლებელმა უნდა აღნიშნოს პირველი გადაადგილების შესაბამისი ვექტორი ვთქვას $\vec{a}$ -თი, მეორე გადაადგილების შესაბამისი ვექტორი – ვთქვას $\vec{b}$ -თი (ამ დროს $\vec{a}$ -ს "საბოლოო წერტილი" იქნება $\vec{b}$ -ს "საწყისი წერტილი") და მოსწავლეებს უნდა აუხსნას, რომ ამ ორი მოძრაობის შედეგად შესრულებულ გადაადგილებას ბუნებრივია ეწოდოს ამ

ნახ.13



ვექტორების ჯამი $\vec{a} + \vec{b}$. მაშასადამე, თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები იმგვარად არიან გამოხატულნი, რომ $\vec{a}$ -ს ბოლო წერტილი ემთხვევა $\vec{b}$ ვექტორის საწყის წერტილს, მაშინ ჯამი $\vec{a} + \vec{b}$ გამოიხატება ვექტორით, რომელიც იწყება $\vec{a}$ -ს საწყისი წერტილში და მთავრდება $\vec{b}$ -ს

ნახ.14

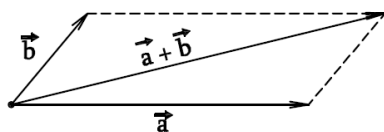


საბოლოო წერტილში. თუკი მასწავლებელი შეახსენებს მოსწავლეებს, რომ ვექტორისთვის საწყისი წერტილის ცნება მხოლოდ პირობით ხასიათს ატარებს და იგი ნებისმიერი წერტილიდან შეგვიძლია გადავდეთ, თანდათან ჯობია გადავიდეთ მკაცრი განმარტების ჩამოყალიბებაზე: " $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები რომ შევკრიბოთ, ამისთვის სიბრტყის ნებისმიერი O წერტილიდან (სასურველია

ეს წერტილი იყოს $\vec{a}$ -ს საწყისი წერტილი) გადავდეთ $\vec{a}$, ვთქვათ $\overrightarrow{OO_1}$, და ამ ვექტორის ბოლო წერტილიდან (ე.ი. O_1 -დან) გადავდეთ $\vec{b}$ ვექტორი, ვთქვათ $\overrightarrow{O_1O_2}$. მაშინ O წერტილის O_2 წერტილთან შემაერთებელ ვექტორს, ე.ი. $\overrightarrow{OO_2}$ -ს ეწოდება $\vec{a} + \vec{b}$ " (იხ. ნახ. 14).

მასწავლებელმა სავარჯიშოს სახით უნდა შეასრულებინოს მოსწავლეებს რამოდენიმე ვექტორთა წყვილის შეკრება აღწერილი წესის მიხედვით. თავიდან სასურველია დავიწყოთ პარალელური ვექტორებით, ვთქვათ OX ან OY ღერძის პარალელური ვექტორებით. მოსწავლეებმა თვალნათლივ უნდა დაინახონ, რომ მაგალითად $\vec{a} = (3; 0)$ და $\vec{b} = (5; 0)$ ვექტორების ჯამი $\vec{a} + \vec{b} = (8; 0)$ ვექტორია (ამით მოსწავლეები რიცხვით ღერძზე შეკრების ოპერაციების ჩატარებასაც გაიმეორებენ). ცხადია უნდა შევკრიბოთ სხვა ტიპის ვექტორებიც, უმთავრესად ნახატების გამოყენებით. ჩამოყალიბებული წესის მიხედვით შეგვიძლია შევკრიბოთ მოპირდაპირე ვექტორებიც. ამ უკანასკნელ

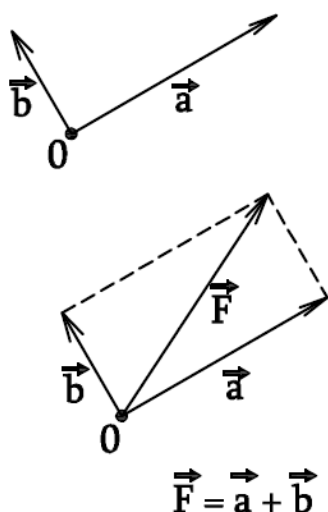
ნახ.15



შემთხვევას მასწავლებელმა განსაკუთრებული ყურადღება უნდა დაუთმოს. მოსწავლეებისთვის თვალნათელი უნდა იყოს, რომ ამ დროს ჯამის საწყისი და საბოლოო წერტილები ემთხვევა და მასწავლებელმა მათ უნდა შეახსენოს, რომ ასეთ ვექტორს ნულოვანი ვექტორი ეწოდება. "მაშასადამე, მოპირდაპირე ვექტორების ჯამი $\vec{0}$ -ის

ტოლი ყოფილა. აქვთ თუ არა ანალოგიური თვისება რიცხვებს? და რიცხვებისთვის ცხადი შემდეგი დამოკიდებულება: $a + 0 = a$ ხოლო არ არის სამართლიანი ვექტორებისთვისაც: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$?". მოსწავლეები უნდა დარწმუნდნენ ამ უკანასკნელ ტოლობაში ვექტორთა შეკრების ზემოთ აღწერილ წესზე დაყრდნობით. ამგვარი მსჯელობები კიდევ უფრო

მნიშვნელოვან ხასიათს შეიძენს ვექტორთა სხვაობის შესწავლისას. მანამდე ჩვენ უნდა ჩამოვყალიბოთ და ხსენებულ ფაქტებთან შევაჯეროთ ვექტორთა შეკრების პარალელოგრამის წესი: "ერთიდაიგივე O წერტილიდან გადადებული ორი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორის ჯამის საპოვნელად ამ ვექტორებზე უნდა ავაგოთ პარალელოგრამი (იხ. ნახ. 15) და იმავე წერტილიდან გამომავალი დიაგონალი იქნება $\vec{a} + \vec{b}$." მოსწავლეთათვის თვალსაჩინო უნდა იყოს, რომ ძველი და ახალი განსაზღვრებები ვექტორების შეკრებისა ერთმანეთს ემთხვევა. ამავე სურათზე შეიძლება შემოწმდეს ვექტორთა შეკრების გადანაცვლებადობის (კომუტაციურობის) თვისება: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$. ანუ, $\vec{a}$ -ს ბოლოდან გადადებული $\vec{b}$ ვექტორი აღწევს იმავე წერტილს, რაც $\vec{b}$ -ს ბოლოდან გადადებული $\vec{a}$. მოსწავლემ უნდა შენიშნოს, რომ მაშინ როცა რიცხვების შეკრებისათვის კომუტაციურობის თვისება ცხადია, ვექტორების შეკრების შემოტანილი წესისთვის იგი ჩვენებას მოითხოვს.

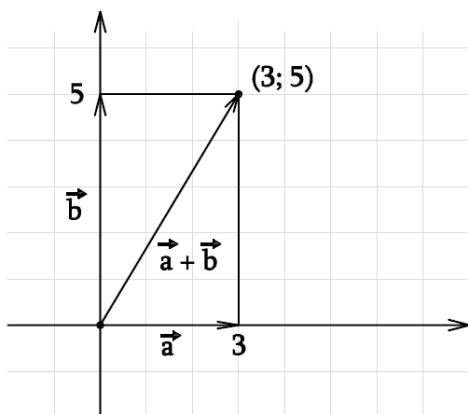


ვექტორთა შეკრების პარალელოგრამის წესი და საზოგადოდ ვექტორთა შეკრება კიდევ უფრო კაგად რომ გავაცნობიეროთ, ინტუიციასეულ დაყრდნობით წარმოვიდგინოთ და ამოვხსნათ შემდეგი სახის ამოცანები: "ვთქვათ O წერტილში მდებარე ციგას ორი ბიჭი ეწევა სხვადასხვა მიმართულებით და სხვადასხვა ძალით, რომელთა შესაბამისი ვექტორები გამოხატულია ნახაზზე. როგორ ფიქრობთ რა მიმართულებით და რამხელა ძალის გავლენით გასრილდება ციგა? იქნება თუ არა ეს ძალა გამოხატული $\vec{F}$ -ით ნახ. 16.-ზე?". ე.ი. თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები გამოხატავენ ბიჭების მიერ ციგაზე მოდებულ ძალებს, რომელ ძალას გამოხატავს $\vec{a} + \vec{b}$? (პას: ამ ძალების ტოლქმედს). მაშასადამე, თუკი სხეულზე ერთდრულად მოქმედებს ორი ძალა, მათი ჯამური ძალა ბუნებრივად მოქმედებს იმგვარად, თითქოს სხეულზე

ჯერ მხოლოდ პირველი ძალა მოქმედებდეს და შემდეგ მეორე. ამასთანავე, რადგან სახელების "პირველი" და "მეორე" დარქმევა პირობითია, ბუნებრივად ვდებულობთ ვექტორების შეკრების კომუტაციურობის კანონსაც. ნახაზზე შეგვიძლია გამოვხატოთ ციგაზე მოდებული ორი ისეთი ძალაც, რომლებიც სიგრძით ტოლია და მიმართულებით საპირისპირო. მაშინ ამ ძალების ჯამი ანუ ტოლქმედი $\vec{0}$ იქნება და ციგა გაჩერებულ მდგომარეობაში დარჩება.

საზგასმით აღვნიშნოთ, რომ თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები პარალელურები არიან, მაშინ მათ პარალელოგრამის წესით ვერ შევკრიბავთ. უფრო მეტიც, საგანგებოდ შევკრიბოთ ასეთი ვექტორები თავდაპირველი წესით და მოწსავლეებს დავუსვათ ასეთი კითხვა: "რას უდრის ჯამის სიგრძე თუკი ცნობილია შესაკრებების სიგრძეები?". მათ დამოუკიდებლად

ნახ.17



უნდა შეძლონ მივიღონ სწორ პასუხამდე: $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ როცა $\vec{a}$ -ს და $\vec{b}$ -ს ერთიდაიგივე მიმართულება აქვთ და $||\vec{a}| - |\vec{b}||$ თუკი ამ ვექტორებს საპირისპირო მიმართულება აქვთ (დასმულ კითხვაში შეიძლება ავიღოთ კონკრეტული რიცხვები).

ესლა გადავიდეთ იმ ვექტორთა შეკრებაზე, რომლებიც კოორდინატებით არიან მოცემულნი. პარალელოგრამის

წესი ჯერ გამოვიყენოთ მარტივ შემთხვევაში, ვთქვათ $\vec{a} = (3; 0)$ და $\vec{b} = (0; 5)$ ვექტორების შესაკრებად. მაშინ აგებული პარალელოგრამი იქნება მართკუთხედი და მისი დიაგონალით გამოხატული ჯამი $\vec{a} + \vec{b}$ კოორდინატებში ჩაიწერება როგორც $(3; 5)$. ანალოგიურად მოვიქცევით სხვა მსგავს სიტუაციებში, როცა $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები OX და OY ღერძების პარალელურია. უფრო ზოგად სიტუაციას მალევე განვიხილავთ.

მანამდე მოსწავლეებს დავუსვათ ამგვარი შეკითხვა: "თუკი ვისწავლეთ ორი ვექტორის შეკრება, საჭიროა თუა არა ცალკე ვისწავლოთ სამი, ოთხი და უფრო მეტი ვექტორის შეკრება? გავიხსენოთ, როდესაც მათემატიკაში ვსწავლობდით რიცხვების შეკრებას, განა ცალკე გვასწავლეს სამი ან ოთხი რიცხვის შეკრება? განა ბუნებრივად ვერ მივხვდებით როგორ შევკრიბოთ ბევრი რიცხვი თანდათან მიმატებით? შეიძლებოდა უბრალოდ ერჩიათ, რომ $281 + 348 + 152$ ჯამის ძიებისას ჯერ ჯობია ბოლო ორი რიცხვი შევკრიბოთ და შემდეგ დავუმატოთ პირველი. ცხადია ასე უფრო მოსახერხებელია და თანაც $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ეს არის შეკრების ასოციაციურობის ანუ ჯგუფუდებადობის თვისება). აქვს თუ არა იგივე თვისება ვექტორების შეკრებას? თუ ჩვენ

ნახ.18



$\vec{a}, \vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორებს ერთმანეთის მიყოლებით გადავდებთ, დავინახავთ რომ $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ ტოლობა სამართლიანია. (მოსწავლეებმა უნდა გამოხატონ ამ ნახატზე $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c}$ და მთლიანი ჯამიც, რათა მათ თვალნათლივ დაინახონ ეს ტოლობა. ამასთანავე კიდევ

ერთხელ გავიხსენოთ, რომ ვექტორთა განხილვისას მნიშვნელობა არა აქვს ამ ვექტორებს თუ რომელი წერტილიდან გადავდებთ. მასწავლებლებს ჩვენ შევთავაზებთ ასოციაციურობის თვისების უფრო ღრმა ანალიზსაც §9-ში). მაშასადამე, ამგვარ ჩანაწერებში შეიძლება საერთოდ გამოვტოვოთ ფრჩხილების ნიშნები და დავწეროთ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

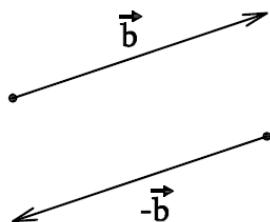
ვექტორთა შეკრების ახსნის შემდეგ ეტაპზე, სასურველია, მოსწავლეებს ამოვახსნევინოთ შემდეგი ტიპის სავარჯიშო: "ვთქვათ $\vec{a} = (2; -1)$ და $\vec{b} = (3; 4)$. ვიპოვოთ $\vec{a} + \vec{b}$ ვექტორის კოორდინატები." საკოორდინატო ბადეზე მოცემული ვექტორებისა და მათი ჯამის გამოხატვით, მოსწავლეებს შეუძლიათ ემპირიულად აღმოაჩინონ, რომ $\vec{a} + \vec{b} = (5; 3)$. "შეგვეძლო თუ არა პასუხისთვის მიგვეგნო ნახატის გარეშე?". მოდით ასეთნაირად მოვიქცეთ: $\vec{a}$ ვექტორი წარმოვადგინოთ $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$ ჯამის სახით, სადაც $\vec{a}_1 = (2; 0)$ და $\vec{a}_2 = (0; -1)$ (ამ წარმოდგენის სამართლიანობა ჩვენ უკვე განვიხილეთ) და ანალოგიურად $\vec{b}$ ვექტორი წარმოვადგინოთ $\vec{b} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$ ჯამის სახით, სადაც $\vec{b}_1 = (3; 0)$ და $\vec{b}_2 = (0; 4)$. მაშინ $\vec{a} + \vec{b} = (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) + (\vec{b}_1 + \vec{b}_2)$ {რადგან მათემატიკაში ნებისმიერი გამოსახულება ყოველთვის შეგვიძლია შევცვალოთ მისი ტოლი გამოსახულებით} $= \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{b}_1 + \vec{b}_2$ {რადგან, როგორც ვნახეთ, ჯამში ფრჩხილები შეგვიძლია არ ჩავწეროთ} $= (\vec{a}_1 + \vec{b}_1) + (\vec{a}_2 + \vec{b}_2)$ {რადგან შეკრება კომუტაციურია} $= (5; 0)$ და $(0; 3)$. {რადგან $\vec{a}_1 + \vec{b}_1 = (5; 0)$ და $\vec{a}_2 + \vec{b}_2 = (0; 3)$ }. (იგივე მსჯელობები შეიძლება ჩატარდეს სათანადო ჩანახატების პარალელურადაც.)

ამგვარი მსჯელობის განზოგადებით მასწავლებელს შეუძლია ჩამოაყალიბოს იოლად დასამახსოვრებელი წესი: "ვექტორთა ჯამის კოორდინატები უდრის შესაყრებათა კოორდინატების ჯამს" (ამ ტოლობის შესახებ წრფივი ალგებრის ელემენტების გამოყენებით კიდევ ერთხელ გვექნება საუბარი მოგვიანებით §6-ში).

შეკრების თემის დასასრულს მასწავლებელს შეუძლია კიდევ ერთი საინტერესო შემთხვევა აღნიშნოს, როცა ვექტორთა ჯამის პოვნა შეიძლება ნახატის გარეშეც: "სიბრტყეზე მდებარე ნებისმიერი სამი A, B და C წერტილებისთვის სამართლიანია ტოლობა $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$. ეს ტოლობა თითქოს ადვილი მისახვედრი უნდა იყოს. სინამდვილეში ვექტორთა შეკრების მთელი შინაარსიც ამ ტოლობითაა გადმოცემული.

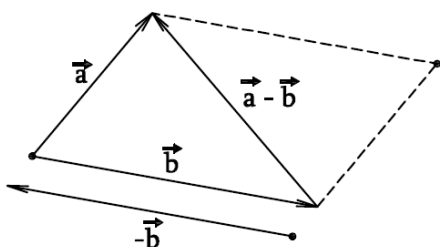
ვექტორების შესახებ საუბრისას ჩვენ შიგადაშიგ ვასახელებდით სხვადასხვა მარტივ ამოცანას, რაც მასწავლებელმა თემის ახსნისას შეიძლება გამოიყენოს. ტიპური ამოცანები მასწავლებელმა შეიძლება სახელმძღვანელოშიც მოძებნოს. კარგი იქნებოდა გვესაუბრა რთულ, მაგრამ სიღრმისეული გაგებისთვის აუცილებელ ამოცანებზეც: "თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს განვიხილავთ როგორც ფუნქციებს (როგორც ზემოთ იყო ნათქვამი, მკაცრი განსაზღვრებით ვექტორი წარმოადგენს ფუნქციას), რა ფუნქცია იქნება $\vec{a} + \vec{b}$." ეს ამოცანა მასწავლებლებისათვის არის განკუთვნილი, მაგრამ არ არის გამორიცხული მასწავლებელმა იგი გამოიყენოს ინდივიდუალური მუშაობისთვის, თუკი მას კლასში ეგულება ასეთი მოსწავლე. ამ ამოცანის ამოხსნას ჩვენ მოგვიანებით განვიხილავთ §9-ში.

ელა გადავიღეთ ვექტორთა გამოკლების განხილვაზე. გავაკეთოთ ანალოგია ნახ.19



რიცხვებთან. შეიძლება ადრე არც გაგვიმახვილებია ყურადღება ამ ფაქტზე: "გვჭირდება კი გამოკლების ოპერაციის ცალკე განსაზღვრა თუკი ვიცით შეკრება და გვაქვს მოპირდაპირე ელემენტის ცნება? განა არ ვიცით, რომ რიცხვებისთვის $a - b = a + (-b)$, სადაც $-b$ არის b -ს მოპირდაპირე". აქ მოსწავლეებს შევასენოთ მოპირდაპირის ცნება, როგორც რიცხვებისთვის, ასევე ვექტორებისთვის. 5-ის მოპირდაპირე არის -5 და -5 -ის მოპირდაპირე არის 5, იმიტომ რომ მათი ჯამი უდრის 0-ს (ასეთი გახლავთ

მოპირდაპირე რიცხვების განსაზღვრებაც, მათი ჯამი უნდა იყოს 0). ჩვენ უკვე შემოვიტანეთ მოპირდაპირე ვექტორის ცნება და ვნახეთ, რომ აღნიშნული პირობა მოპირდაპირესთან ჯამის 0-თან ტოლობისა სრულდება. მაშასადამე ისღა დაგვრჩენია $\vec{b}$ ვექტორის მოპირდაპირე აღვნიშნოთ $-\vec{b}$ -თი და გვექნება ვექტორთა გამოკლების შესაძლებლობაც $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$, ანუ გამოკლება ნიშნავს მოპირდაპირესთან შეკრებას.



დავაკვირდეთ, როგორ გამოიხატება ორი ვექტორის სხვაობა, როცა ეს ვექტორები ერთიდაიგივე წერტილიდან არიან გადაღებული (იხ. ნახ 20). თუკი $-\vec{b}$ ვექტორს გადავდებთ $\vec{b}$ -ს ბოლო წერტილიდან, ჩანს რომ $-\vec{b} + \vec{a}$ ვექტორის (იგივე $\vec{a} - \vec{b}$ ვექტორის) დასაწყისია $\vec{b}$ -ს ბოლო წერტილი და დაბოლოება $\vec{a}$ -ს ბოლო წერტილი. მივიღებთ ე.წ. ვექტორების გამოკლების პარალელოგრამის წესს: "თუ ორი ვექტორი

ერთიდაიგივე წერტილიდან არის გადაღებული, მაშინ ამ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის მეორე დიაგონალი მიმართული მაკლების ბოლოდან საკლების ბოლოსკენ გამოხატავს ამ ვექტორების სხვაობას."

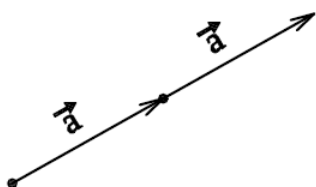
ცხადია მოტანილი ახსნა-განმარტებებიც სათანადო სავარჯიშოების შესრულებით უნდა განვამტკიცოთ: "თუ $\vec{a} = (2; 3)$ და $\vec{b} = (1; -2)$ რა იქნება $\vec{a} - \vec{b}$ ვექტორის კოორდინატები?" შეგვიძლია მოსწავლეებს დავავალოთ ჩამოაყალიბონ ვექტორების კოორდინატებში შეკრების ანალოგიური წესი გამოკლებისთვისაც.

ვცადოთ ამოვხსნათ ამგვარი ამოცანაც ყოველგვარი ნახაზის გარეშე: "ვთქვათ $A = (-1; 2)$ და $B = (3; 5)$. ვიპოვოთ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის კოორდინატები". მოსწავლეებს უნდა შეეძლოთ ამოცანის პასუხის მოძებნა საკოორდინატო ბადეზე სათანადო ნახაზის

დახატვით (გადავდოთ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორი O სათავიდან და მოვძებნოთ გადაღებული ვექტორის ბოლო წერტილის კოორდინატები), მაგრამ ვინაიდან გვთხოვენ პასუხის დადგენას ნახაზის გარეშე, ამგვარად ვიმსჯელოთ: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (3 - (-1); 5 - 2) = (4; 3)$. პასუხის მოძებნის შემდეგ შეგვიძლია ნახაზითაც დავრწმუნდეთ მის სისწორეში და ზოგადი წესიც ჩამოვაცალიბოთ: "თუ $A = (x_1; y_1)$ და $B = (x_2; y_2)$, მაშინ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის კოორდინატებია $(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ ".

ჯობია დავრწმუნდეთ, რომ მოსწავლეებს შეუძლიათ განვლილი მასალის შესაფერისი სავარჯიშოების შესრულება, სანამ ახალი მასალის ახსნაზე გადავიდოდეთ.

ვექტორის რიცხვზე გამრავლება



$$\vec{a} + \vec{a} = 2\vec{a}$$

ვექტორის რიცხვზე გამრავლების შესწავლა მისაღებია ვექტორების შეკრების განმეორებით დავიწყოთ. ავიღოთ რაიმე $\vec{a}$ ვექტორი, მას იგივე $\vec{a}$ ვექტორი დავუმატოთ. ჯამური ვექტორი გამოვხატოთ ნახატზე და მოსწავლეებს დავუსვათ კითხვა: "რა იქნება ჯამის მიმართულება?" (ექნება თუ არა მას იგივე მიმართულება რაც $\vec{a}$ -ს?). "რა იქნება ჯამის სიგრძე?" (თუ გვეცოდინება $\vec{a}$ -ს სიგრძე). ცხადია მოსწავლეებმა უნდა შეძლონ ამ კითხვებზე პასუხის გაცემა და მასწავლებელი უნდა დაეხმაროს განვლილი მასალის ცოდნაში

შემჩნეული ხარვეზების დაუყოვნებლივ აღმოფხვრაში. რა ვუწოდოთ $\vec{a} + \vec{a}$ -ს რომ იგი გამოხატავდეს ტოლი ვექტორების შეკრებას? განა როცა რაიმე სიდიდეს, ვთქვათ x -ს ვუმატებთ იმავე სიდიდეს, ჯამს არ ვწერთ როგორც $x + x = 2x$ -ს. მაშასადამე აქ შეიძლება გამოყენებულ იქნას ანალოგია რიცხვების შეკრებასთან: "მოდიოთ ასევე მოვიქცეთ ვექტორებისთვის და $\vec{a} + \vec{a}$ აღვნიშნოთ $2\vec{a}$ -თი". მაშინ ცხადია რას დავარქმევთ $3\vec{a}$ -ს, $4\vec{a}$ -ს, და ა. შ. მოდიოთ ბუნებრივად ეს იყოს ვექტორის ნატურალურ რიცხვზე გამრავლების ოპერაციის განსაზღვრა:

$$n \cdot \vec{a} = \underbrace{\vec{a} + \vec{a} + \dots + \vec{a}}_{n-\text{ჯერ}} \quad (1)$$

განა თვითონ რიცხვების გამრავლებაც ასევე არ განვსაზღვრეთ შეკრების ოპერაციაზე დაყრდნობით, როცა მას თავიდან ვეცნობოდით დაწყებით კლასებში?

დავაკვირდეთ, რა ცნობილი თვისებები ექნება ვექტორის ნატურალურ რიცხვზე გამრავლების ამგვარად შემოტანილ ოპერაციას:

- 1) $n\vec{a} + m\vec{a} = (n + m)\vec{a}$ (2ა)
- 2) $n(m\vec{a}) = (nm)\vec{a}$ (2ბ)
- 3) $r(\vec{a} + \vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b}$ (2გ)

აქ მასწავლებელმა სიტყვიერადაც უნდა გაიმეოროს შესასრულებელი ოპერაციების თანმიმდევრობა და მოსწავლეებმა ნათლად უნდა წარმოიდგინონ ამ ტოლობების

სამართლიანობა (1) განსაზღვრებაზე დაყრდნობით. შეიძლება შესაბამისი ნახატებიც გავაკეთოთ დაფაზე ან რვეულში. (2გ) ტოლობის წარმოსადგენლად დავჭირდება ვექტორთა შეკრების კომუტაციურობის თვისებას.

$$n(\vec{a} + \vec{b}) = \underbrace{(\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{a} + \vec{b}) + \dots + (\vec{a} + \vec{b})}_{n\text{-ჯერ}} = \underbrace{\vec{a} + \vec{a} + \dots + \vec{a}}_{n\text{-ჯერ}} + \underbrace{\vec{b} + \vec{b} + \dots + \vec{b}}_{n\text{-ჯერ}} = n\vec{a} + n\vec{b}$$

(1) ტოლობაზე დაყრდნობით შეგვიძლია $7\vec{a}$ ვექტორის დახატვაც, მაგრამ მოდით დავსვით ასეთი კითხვა: *“შეგვიძლია თუ არა $7\vec{a}$ ვექტორის აგების გარეშე მივხვდეთ მის სიგრძესა და მიმართულებას?”* ცხადია მოსწავლეები უნდა მივიდნენ ამ კითხვის სწორ პასუხამდე და ისინი შემზადებული იქნებიან გაიაზრონ მასწავლებლის მიერ ჩამოყალიბებული შემდეგი წესი: *“ $n\vec{a}$ ვექტორს აქვს იგივე მიმართულება რაც $\vec{a}$ -ს და მისი სიგრძე კი ტოლია $n|\vec{a}|$ -ის”*. აქ კიდევ შევახსენოთ მოსწავლეებს (1) განსაზღვრება და ეს წესიც მათთვის ბუნებრივად მისაღები იქნება. ამ ნაბიჯით მივუახლოვდეთ ვექტორის ზოგადად ნებისმიერ რიცხვზე გამრავლების განსაზღვრასაც. მასწავლებელს შეუძლია წინასწარ შეამზადოს მოსწავლეები, რომ სულ მოკლე ხანში ვაპირებთ ამ ოპერაციის ზოგადად შესწავლას, რომელიც ზემოაღნიშნული წესის ანალოგიურად განისაზღვრება და რომელიც ძალაში ტოვებს (2)-ის ანალოგიურ ტოლობებსაც. მანამდე შევეცადოთ მოცემული ვექტორის წილადზე გამრავლებაც განვსაზღვროთ.

როგორ ვიპოვოთ $\frac{1}{2}\vec{a}$ ვექტორი თუკი მოცემულია $\vec{a}$ ვექტორი. თუ გვინდა რომ (2ბ) ტოლობა იყოს სამართლიანი, მაშინ $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{a} = 2\left(\frac{1}{2}\vec{a}\right) = \left(2 \cdot \frac{1}{2}\right)\vec{a} = \vec{a}$. ანუ $\frac{1}{2}\vec{a}$ ვექტორი ისეთი უნდა იყოს, რომ თავის თავთან შეკრებით $\vec{a}$ ვექტორი მივიღოთ. უკვე გააზრებული აქვთ თუ არა მოსწავლეებს ვექტორების შეკრება იმდენად, რომ შეძლონ ამგვარი ვექტორის მოძებნა? რიცხვების შეკრების შესწავლის დროსაც ხდებოდა ამგვარი ამოცანების ამოხსნით შეკრებაში დახელოვნება. ვიპოვოთ ისეთი რიცხვი, რომელიც თავის თავთან შეკრებით გვაძლევს 10-ს. მოსწავლეებს შეუძლიათ ცდისა და შერჩევის ხარჯზე მოძებნონ ამგვარი ვექტორი. ეს მათი უნარების გავარჯიშების საუკეთესო საშუალება იქნება და იმედია მოსწავლეთა უმეტესობა მიაგნებს სწორ პასუხს. ამ ამოცანის დამოუკიდებელი ამოხსნა მოსწავლეებს საშუალებას მისცემს რათა მათ გაიაზრონ სიტუაცია უფრო ზოგადად: $\frac{1}{n}\vec{a}$ ვექტორი ისეთი უნდა იყოს, რომ თავის თავთან n -ჯერ შეკრებით $\vec{a}$ ვექტორი მივიღოთ (n -ის როლში ნებისმიერი კონკრეტული ნატურალური რიცხვი შეგვიძლია ავიღოთ მსჯელობის გასამარტივებლად) და ასეთი ვექტორი $\vec{a}$ -ს ნახატზე შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ. თუ ახლა ავიღებთ ისეთ წილადს, რომლის მრიცხველიც არ არის მაინდამაინც 1 და დავაკვირდებით ტოლობას $\frac{m}{n}\vec{a} = \left(m \cdot \frac{1}{n}\right)\vec{a} = m\left(\frac{1}{n}\vec{a}\right)$ მივხვდებით, რომ $\frac{m}{n}\vec{a}$ ვექტორის საპოვნელად $\frac{1}{n}\vec{a}$ ვექტორი უნდა შევკრიბოთ m -ჯერ. ეს ოპერაცია მსგავსი იქნება რიცხვით ღერძზე ჩვეულებრივი რიცხვების შეკრების ოპერაციისა. უბრალოდ შეგვიძლია $\vec{a}$ ვექტორი ღერძის ერთეულად წარმოვიდგინოთ. ამ შესრულებული სავარჯიშოების გარეშე, მოსწავლეთათვის ძალიან მშრალი იქნებოდა პირდაპირ წესის ჩამოყალიბება: *“ r დადებითი რიცხვისა და $\vec{a}$ ვექტორის ნამრავლი (იგი აღინიშნება $r\vec{a}$ -თი) ეწოდება ისეთ ვექტორს, რომლის მიმართულებაც ემთხვევა $\vec{a}$ -ს მიმართულებას, ხოლო სიგრძე უდრის $r|\vec{a}|$ -ს”*. მიღებული გამოცდილებით მოსწავლეებს შეუძლიათ შეამოწმონ ამ წესის თანხვედრა ვექტორების

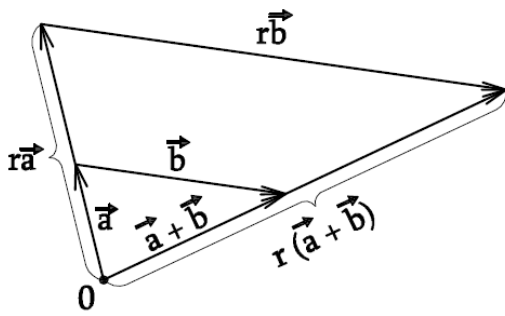
რაციონალურ რიცხვებზე (ე.ი. წილადებზე) გამრავლების შესრულებულ ოპერაციებთან და რიცხვის ცნების გააზრება ამ ეტაპზე ამოიწურება რაციონალური რიცხვებით. აღნიშნული წესის საფუძველზე უნდა დავრწმუნდეთ აგრეთვე (2) ტოლობების სამართლიანობაში მაშინაც როცა n და m ნებისმიერი დადებითი რიცხვებია (გავიხსენოთ პარალელური ვექტორების შეკრების სავარჯიშო).

ეს ადგილი ყველაზე კრიტიკული გახლავთ ვექტორისა და რიცხვის გამრავლების შესწავლისას. ვექტორის უარყოფით რიცხვზე გამრავლება აღარ უნდა წარმოადგენდეს პრობლემას თუ გავიხსენებთ მოპირდაპირე ვექტორის აღნიშვნას და შევთანხმდებით, რომ $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ და $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$ (მართლაც, სწორედ ამგვარი შეთანხმებით რჩება სამართლიანი (2ა) ტოლობა მთელი რიცხვებისათვის). მაშასადამე (2ბ) ტოლობის გათვალისწინებით ბუნებრივად ვღებულობთ $(-r)\vec{a} = (-1 \cdot r)\vec{a} = -1(r\vec{a}) = -(r\vec{a})$ და ე.ი. უარყოფით რიცხვზე გამრავლებით ვექტორის მიმართულება მისი მოპირდაპირე მიმართულებით უნდა შევცვალოთ (ამ ტოლობებში r იგულისხმება დადებითი). შეგვიძლია უკვე ზოგადი წესიც ჩამოვყალიბოთ $r\vec{a}$ ვექტორის განსაზღვრის, სადაც მისი მიმართულება უნდა შევარჩიოთ r -ს ნიშნის მიხედვით, ხოლო სიგრძე ყოველთვის იქნება $|r| \cdot |\vec{a}|$ -ის.

კიდევ ერთხელ გავიაზროთ, როგორ შემოვიტანეთ ვექტორის ნამრავლი რიცხვებზე. ჯერ გავამრავლეთ ნატურალურ რიცხვებზე (1) ტოლობით, რომელსაც აღმოაჩნდა ბუნებრივი (2) თვისებები, შემდეგ უკვე (2) თვისებების შენარჩუნებით შევეცადეთ განგვევრცო ეს გამრავლება ნებისმიერ რიცხვებზე. სიტუაცია ძლიერ წააგავს დადებითი რიცხვების ახარისხებას. ზუსტად ასევე, ჩვენ ჯერ განვსაზღვრეთ a^n ნატურალური n -ებისთვის გამრავლებაზე დაყრდნობით $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n-\text{ჯერ}}$ (შეადარე (1)-ს), რომელსაც

ბუნებრივად აღმოაჩნდა $a^{n+m} = a^n a^m$ და $(a^n)^m = a^{nm}$ თვისებები (შეადარე (2)-ს) და შემდეგ ამ თვისებების შენარჩუნების მცდელობით განვსაზღვრეთ ახარისხება მთელი და რაციონალური რიცხვებისთვის. ეს მსგავსება შემთხვევითი არ არის და შინაგან კანონზომიერებას ატარებს *)

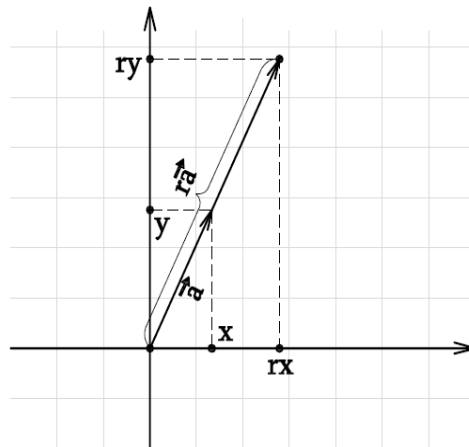
*) მასწავლებლებს, ვისაც ახსოვთ უმაღლეს მათემატიკაში ნასწავლი ჯგუფის, ველისა და წრფივი სივრცის ცნებები განუმარტავთ, რომ დადებითი რიცხვების გამრავლების მიმართ კომუტაციური ჯგუფი R_+ , მასში ნამდვილ რიცხვთა R ველის მიმართ შემოტანილი სკალარზე გამრავლების ოპერაციით როგორც ახარისხება $r \cdot a = a^r$, ჰქმნის წრფივ სივრცეს.



ვექტორის რიცხვზე გამრავლების ზუსტი წესის ჩამოყალიბების შემდეგ განმეორებით დავუკვირდეთ (2) ტოლობების სამართლიანობას უკვე ნებისმიერი, არა მაინდამინც ნატურალური რიცხვებისთვის. კერძოდ დადებითი r -ისთვის $r(\vec{a} + \vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b}$ ტოლობა შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ (21) ნახატის მიხედვით და მოსწავლეებმა უნდა აღმოაჩინონ მსგავსი სამკუთხედები რითაც განპირობებულია

მოცემული ტოლობა. თუ $r < 0$, მაშინ შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ O ცენტრის მიმართ სიმეტრიული სურათი (დავავალოთ მოსწავლეებს ააგონ ეს სურათი), რომელიც გამოსატყვევს ამ ტოლობას.

ნახ.22



როდესაც მოსწავლეები ახალი მასალის ათვისების შემდეგ, შეასრულებენ რამდენიმე სავარჯიშოს მოცემული კონკრეტული ვექტორის კონკრეტულ რიცხვზე გამრავლებისა, ისევ შეგვიძლია გადავიდეთ საკოორდინატო სიბრტყეზე. ამოვხსნათ ნიმუშად ასეთი ამოცანა: ვთქვათ $\vec{a} = \overline{(1; 2)}$ ვიპოვოთ $3\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატები.

მოსწავლეებმა უნდა გააკეთონ საკოორდინატო ბაღეზე შესაბამისი სურათი და იმედია მათი აბსოლუტური უმრავლესობა მიაგნებს სწორ პასუხს ($3\vec{a} = \overline{(3; 6)}$). ბუნებრივად შევამჩნევთ იმასაც, თუ როგორ გამოვთქვათ ვექტორის რიცხვზე გამრავლების წესი კოორდინატების მეშვეობით. "თუ $\vec{a} = \overline{(x; y)}$, მაშინ $r\vec{a} = \overline{(rx; ry)}$ ", რისი სამართლიანობაც ჩანს ნახატზე შესაბამისი სამკუთხედების მსგავსების მეშვეობით (ეს წესი სამართლიანია მაშინაც როცა r ნულია ან უარყოფითია. მოგვიანებით ჩვენ ვაჩვენებთ ამ და მსგავსი წესების სამართლიანობას ვექტორული ალგებრის გამოყენებითაც).

მასალის ახსნის შედეგად მოსწავლეები ნათლად უნდა ხედავდნენ, რომ ვთქვათ $\vec{a}$ და $3\vec{a}$

ვექტორები ყოველთვის პარალელურები არიან, მაგრამ მათ უნდა მოახერხონ ჩაწვდნენ უფრო მეტსაც: "თუ ორი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორი პარალელურია, მაშინ არსებობს ისეთი r რიცხვი, რომ

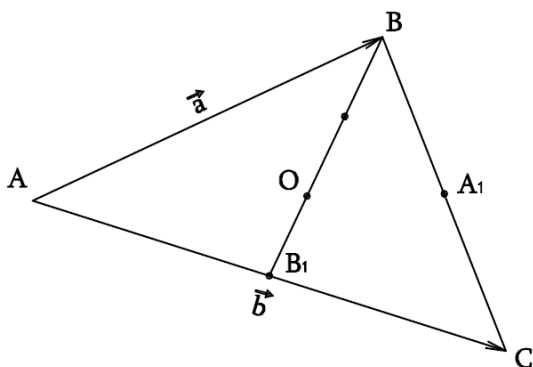
$$\vec{b} = r\vec{a} \quad (4)$$

(ვგულისხმობთ, რომ $\vec{a} \neq \vec{0}$). მართლაც, როგორ ვიპოვოთ ასეთი r ? ცხადია r უნდა იყოს დადებითი თუკი $\vec{a}$ -ს და $\vec{b}$ -ს ერთიდაიგივე მიმართულება აქვთ და r უნდა იყოს უარყოფითი თუკი მათ საპირისპირო მიმართულება აქვთ (რადგან თუ $\vec{a} \parallel \vec{b}$, მაშინ ამ ვექტორებს, ან ერთიდაიგივე მიმართულება აქვთ ან საპირისპირო). შევეცადოთ ვიპოვოთ r -ის მოდულიც. გავიხსენოთ განსაზღვრა ვექტორის რიცხვზე გამრავლებისა: “თუკი (4) ტოლობა სრულდება, უდრის თუ არა განსაზღვრების ძალით $\vec{b}$ -ს სიგრძე $|r| \cdot |\vec{a}|$ -ს? მაშასადამე $|r| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ და ამგვარად შერჩეული r -ისთვის შესრულდება (4) ტოლობა.

ორ პარალელურ ვექტორს ჰქვიათ *კოლინეარული* (colinear). იგულისხმება, რომ ნულოვანი ვექტორი ყველა სხვა ვექტორის კოლინეალურია. ჩატარებული მსჯელობა შეგვიძლია შევაჯამოთ შემდეგნაირად: “*ვთქვათ $\vec{a}$ ვექტორი არანულოვანია, მაშინ $\vec{b}$ ვექტორი მისი კოლინეარულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუკი არსებობს ისეთი r რიცხვი, რომლისთვისაც სრულდება (4) ტოლობა*”. ეს აღგებრული ტოლობა შეიძლება მნიშვნელოვანი იყოს ზოგიერთი გეომეტრიული ამოცანის გადაწყვეტაში. კერძოდ, შეიძლება რაიმე ამოცანაში მოცემული იყოს სამი სხვადასხვა წერტილი A, B, C და უნდა გავარკვეთ, ეკუთვნია თუ არა ისინი ერთიდაიმავე წრფეს. ამისათვის დავაკვირდეთ, რომ ეს პირობა შესრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა $(AB) \parallel (AC)$. ხოლო, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ეს პირობა შესრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა $\vec{AC} = r \cdot \vec{AB}$ -ს რაიმე r -ისთვის. ამოვხსნათ კონკრეტული ამოცანა: “ნახაზის აგების გარეშე დავადგინოთ ძვეს თუ არა $A = (1; -2)$, $B = (-3; 6)$ და $C = (6; -12)$ წერტილები ერთ წრფეზე”. ვნახოთ არსებობს თუ არა ისეთი r , რომლისთვისაც $\vec{AC} = r \cdot \vec{AB}$. ჩავწეროთ $\vec{AC}$ და $\vec{AB}$ ვექტორები კოორდინატებში: $\vec{AC} = (5; -10)$ და $\vec{AB} = (-4; 8)$ (ჩვენ უკვე შესრულებული გვაქვს ამგვარი სავარჯიშო). მაშინ $r \cdot \vec{AB} = (-4r; 8r)$ ნებისმიერი r რიცხვისთვის და უნდა ვიპოვოთ ისეთი r რომლისთვისაც $(-4r; 8r) = (5; -10)$. მართლაც ეს ტოლობა სრულდება $r = -5/4$ -სთვის ე.ი. $\vec{AC} = -\frac{5}{4} \cdot \vec{AB}$ და A, B და C წერტილები ერთ წრფეზეა. (სასურველი r რომ ვერ გვეპოვნა, ე.ი. $-4r = 5$ განტოლების ამონახსნი იმავდროულად რომ არ ყოფილიყო $8r = -10$ განტოლების ამონახსნიც, მაშინ დავასკვნიდით რომ A, B და C წერტილები ერთ წრფეზე არ ძვეს.)

განვიხილოთ კიდევ ერთი ანალოგიური ამოცანა, რომელსაც ამოვხსნით ყოველგვარი კოორდინატების გარეშე: “*ნებისმიერ ABC სამკუდედში BB_1 მედიანაზე დავსვათ O წერტილი, რომელიც მას გაყოფს შეფარდებით $|BO|:|OB_1| = 2:1$. აჩვენეთ, რომ*

O წერტილი ძვეს AA_1 მედიანაზე“. ცხადია ამ ამოცანას პირდაპირ ამოვხსნით თუ გავიხსენებთ სამკუთხედის მედიანების თვისებას, რომ ისინი იკვეთებიან ერთ წერტილში შეფარდებით 2:1-თან (გადათვლილი წვეროს მხრიდან). ეს ფაქტი მის



გეომეტრიულ დამტკიცებასთან ერთად უკვე ნასწავლი ექნებათ მოსწავლეებს, მაგრამ ჩვენ წარმოგიდგენთ განსხვავებულ ამოხსნას ვექტორების მეშვეობით, რომელიც გვერდს აუვლის ადრე ნასწავლ გეომეტრიულ ფაქტებს. მართლაც, A, O და A_1 წერტილების ერთ წრფეზე განლაგება ვაჩვენოთ $\overrightarrow{AA_1} = r\overrightarrow{AO}$ ტოლობის დამტკიცებით, როგორც ეს ზემოთ იყო ახსნილი. r -ის მნიშვნელობა იქნება $3/2$. შემოვიტანოთ აღნიშვნები $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ და $\vec{b} =$

$\overrightarrow{AC}$ და თანდათან გმოვსახოთ ყველა საჭირო ვექტორი $\vec{a}$ -ს და $\vec{b}$ -ს საშუალებით. კარგად გავანალიზოთ ქვემოთ მიღებული ვექტორული ტოლობები. თითოეული მათგანი უშუალოდ მიიღება უკვე ნასწავლი ოპერაციების გამოყენებით. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \vec{b} - \vec{a}$; $\overrightarrow{BA_1} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} (\vec{b} - \vec{a})$; $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1} = \vec{a} + \frac{1}{2} (\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b})$; $\overrightarrow{AB_1} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \vec{b}$; $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB_1} = \frac{1}{2} \vec{b} - \vec{a}$; $\overrightarrow{BO} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BB_1} = \frac{2}{3} (\frac{1}{2} \vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{3} \vec{b} - \frac{2}{3} \vec{a}$; $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b} - \frac{2}{3} \vec{a} = \frac{1}{3} (\vec{a} + \vec{b})$. ე. ი. მართლაც $\frac{3}{2} \overrightarrow{AO} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} (\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b}) = \overrightarrow{AA_1}$, რისი ჩვენებაც გვინდოდა. როგორც ვხედავთ, ამოხსნის ეს გზა არ გამოვიდა უფრო მოკლე, ვიდრე მედიანების თვისების გეომეტრიული დამტკიცება, მაგრამ ვთვლით, რომ იგი კარგი საშუალებაა, როგორც ვექტორებზე ოპერაციების ცოდნის გაღმავებისათვის, ისე ალგებრული მეთოდების გეომეტრიაში გამოყენების ილუსტრაციისათვის. მასწავლებელს შეუძლია მოსწავლეებსაც მისცეს ეს ამოცანა დავალებად (სათანადო მითითებით), მას შემდეგ რაც შეატყობს, რომ მოსწავლეთა უმრავლესობა დაუფლა და ახერხებს ვექტორებზე სათანადო ოპერაციების სწორად შესრულებას. მოგვიანებით ჩვენ მედიანების გადაკვეთის წერტილის შესახებ თეორემის კიდევ ერთ მოკლე დამტკიცებას შემოგთავაზებთ, ვექტორული მეთოდების უფრო მძლავრი გამოყენებით (იხ. §12).

ვექტორთა ალგებრა.

ვექტორებზე შემოტანილ ოპერაციების მიმართ შეგვიძლია თუ არა მოვიქცეთ რიცხვების ანალოგიურად? მაგალითად, ყველასთვის კარგად არის ცნობილი წრფივი ალგებრული განტოლების ამოხსნა:

$$\begin{aligned} 5x + 7 &= 18 \\ 5x &= 18 - 7 \\ x &= \frac{11}{5}. \end{aligned} \tag{5}$$

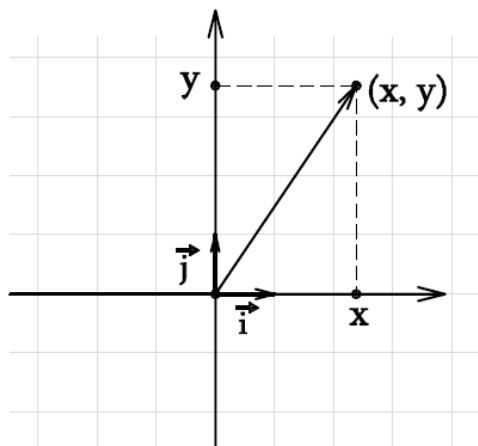
თუკი ვთქვათ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები ცნობილია, შეიძლება თუ არა ანალოგიური გზით მოვძებნოთ ისეთი $\vec{x}$ ვექტორი რომლისთვისაც $3\vec{x} + \vec{a}$ უდრის $\vec{b}$ ვექტორს:

$$\begin{aligned}
 3\vec{x} + \vec{a} &= \vec{b} \\
 3\vec{x} &= \vec{b} - \vec{a} \\
 \vec{x} &= \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a}).
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

რასაკვირველია შეგვიძლია. (5) განტოლების ამოხსნისას ჩვენ უბრალოდ ვიყენებდით რიცხვების ტოლობებისთვის კარგად ცნობილ თვისებებს: $a = b \Rightarrow a + c = b + c$ და $ar = br$ ასე რომ ორივე მხარეს დავუმატეთ -7 ხოლო შემდეგ გავამრავლეთ $\frac{1}{5}$ -ზე. ცხადია იგივე თვისებები აქვთ ვექტორულ ტოლობებსაც: $\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow \vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{c}$ და $r\vec{a} = r\vec{b}$ ასე რომ (6)-ში ჩატარებული მოქმედებები და შესაბამისად $\vec{x}$ -ის პოვნა გამართლებულია.

ვექტორების წარმოდგენა სტანდარტულ ბაზისში.

ნახ.25



მოდიტ კიდევ ერთხელ დავაკვირდეთ ვექტორთა შეკრებისა და რიცხვებზე გამრავლების ძირითადი თვისებები (2)-(4) რა მნიშვნელოვან როლს თამაშობს ვექტორთა შინაგან სტრუქტურაში კანონზომიერებების აღმოჩენისას მათი კოორდინატებით ჩაწერის დროს.

მოდიტ შემოვიტანოთ აღნიშვნები $\vec{i} = \overrightarrow{(1; 0)}$ და $\vec{j} = \overrightarrow{(0; 1)}$ (შეგახსენებთ, რომ $\vec{a} = \overrightarrow{(x; y)}$ ნიშნავს რომ $\vec{a}$ არის კოორდინატთა სათავეს $(x; y)$ წერტილთან შემაერთებული ვექტორი) ამ ორ ვექტორს ჰქვია სიბრტყის ვექტორთა სტანდარტული ბაზისი. სიტყვა ბაზისის ქვეშ ვგულისხმობთ, რომ ყველა სხვა ვექტორი მიიღება ამ $\vec{i}$ და $\vec{j}$ ვექტორების რაღაც კომბინაციით (როგორც, მაგალითად, ყველა ფერადი გამოსახულება ეკრანზე მიიღება სამი ძირითადი ფერის: წითელის, მწვანის და ლურჯის კომბინაციით. სიტყვა "სტანდარტულს" ვუმატებთ იმიტომ, რომ სიბრტყის ვექტორებს გააჩნიათ სხვა ბაზისებიც, რომელთა შესახებ მოგვიანებით ვისაუბრებთ). მართლაც, კარგად დავაკვირდეთ და გავიაზროთ, რომ ნებისმიერი $\vec{a} = \overrightarrow{(x; y)}$ ვექტორი გამოისახება როგორც

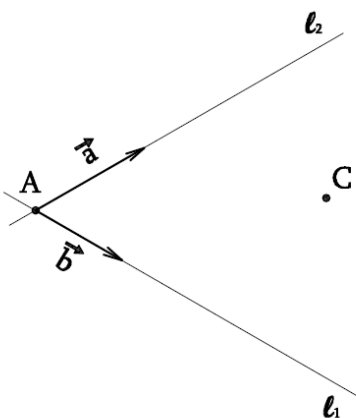
$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}. \tag{7}$$

(მოსწავლეებთან ამ თემაზე საუბრის დროს x -ის და y -ის როლში შეგვიძლია ავიღოთ კონკრეტული რიცხვები). ამ დროს ამბობენ, რომ $\vec{a}$ ვექტორი წარმოდგება $\vec{i}$ და $\vec{j}$ ვექტორების წრფივი კომბინაციით (საზოგადოდ, $r_1\vec{e}_1 + r_2\vec{e}_2$ ჯამი წარმოადგენს $\vec{e}_1$ და $\vec{e}_2$ ვექტორების წრფივ კომბინაციას).

ცხადია, სამართლიანია პირიქითაც თუ ავიღებთ ორ ნებისმიერ რიცხვს x -ს და y -ს და განვიხილავთ წრფივ კომბინაციას $x\vec{i} + y\vec{j}$, მიღებული ვექტორი იქნება $(x; y)$. თითქოსდა (7) ტოლობა ისედაც წარმოდგენილი გვექონდა გეომეტრიულად და მასში ახალი არაფერია, მაგრამ ამ ჩანაწერით აქცენტი კეთდება მის ალგებრულ ხასიათზე. უფრო მეტიც, თუკი $\vec{a}$ ვექტორი გვაქვს ჩაწერილი (7) ტოლობით მაშინ ყოველგვარი ნახატის გარეშე შეგვიძლია მივხვდეთ $\vec{a}$ -ს კოორდინატებს.

ახლა თუ გავიხსენებთ, რომ ვექტორების შეკრებისა და რიცხვზე გამრავლების ოპერაციებს გააჩნიათ (2) თვისებები, ბუნებრივად ალგებრული გზით მივიღებთ თითოეულ იმ წესს ამ ოპერაციების კოორდინატების ტერმინებში გამოსახვისა, რომლებზედაც ადრე გვექონდა საუბარი. კერძოდ, თუ $\vec{a} = (x_1; y_1)$ და $\vec{b} = (x_2; y_2)$ მაშინ, როგორც ზემოდ აღვნიშნეთ, $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ და $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$. შესაბამისად $\vec{a} + \vec{b} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) + (x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) = x_1\vec{i} + x_2\vec{i} + y_1\vec{j} + y_2\vec{j} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j}$. ანუ $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$. ანალოგიურად $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1)\vec{b} = (x_1 - x_2)\vec{i} + (y_1 - y_2)\vec{j}$, ანუ $\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$. ამასთანავე $r\vec{a} = r(x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) = r(x_1\vec{i}) + r(y_1\vec{j}) = (rx_1)\vec{i} + (ry_1)\vec{j} = rx_1\vec{i} + ry_1\vec{j}$, ანუ $r\vec{a} = (rx_1; ry_1)$.

ამრიგად, (7) ტოლობის არსი ძალიან მნიშვნელოვანია და კიდევ ერთხელ ხაზგასმით უნდა აღინიშნოს, რომ ამ ტოლობით შეგვიძლია ჩავწეროთ ნებისმიერი ვექტორი, მათ შორის ნულოვანი ვექტორიც: $\vec{0} = 0\vec{i} + 0\vec{j}$.



ვექტორების წარმოდგენა ნებისმიერ ბაზისში.

მოლით დავიწყეთ შემდეგი გეომეტრიული ამოცანის ამოხსნით. ავიღოთ ნებისმიერი ორი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორი და გადავდოთ ისინი ერთი და იგივე A წერტილიდან. ავიღოთ აგრეთვე სიბრტყეზე ნებისმიერი C წერტილი და დავსვათ ასეთი ამოცანა. “ავაგოთ ისეთი **პარალელოგრამი** რომლისთვისაც AC იქნება **დიაგონალი**

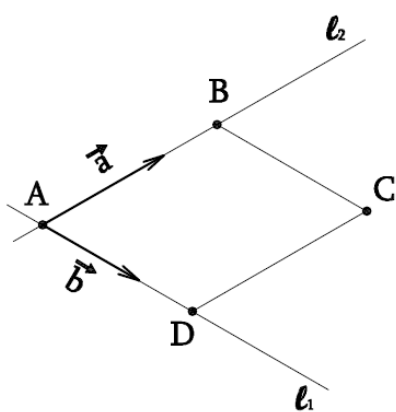
და A წვეროდან გამომავალი ორი გვერდი იქნება შესაბამისად $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების **პარალელური**”, ანუ A წერტილისგან განსხვავებული კიდევ ორი წვერო იქნება ნახატზე გამოსახულ l_1 და l_2 წრფეებზე. მოსწავლეთათვის ამ ამოცანის დასმა მიზანშეწონილია იმ მიზეზიდან გამომდინარე, რომ მისი ამოხსნა მათგან მხოლოდ ვიზუალური წარმოსახვის უნარს მოითხოვს, მცირედენი ელემენტარული ფაქტების ცოდნასთან ერთად, მაშინ როცა თავად ამოცანის ამოხსნა უშუალოდ უკავშირდება ვექტორების ერთ-ერთი ფუნდამენტური თვისების მყარად გაცნობიერებას. ვთხოვთ მოსწავლეებს თითოეულმა მათგანმა დამოუკიდებლად ააგოს ასეთი პარალელოგრამი თავის რვეულში, რათა ყველას მიეცეს ფიქრის დრო. ჩვენ მხოლოდ ნახ. 26 გავაკეთოთ დაფაზე და დროებით ნუ განვიხილავთ იმ შემთხვევას, როცა C წერტილი l_1 ან l_2 წრფეზეა. მას შემდეგ რაც მოსწავლეები ააგებენ საძიებელ პარალელოგრამს, ჩვენც გამოვსახოთ იგი

ნახატზე და მოსწავლეთა ყურადღება მივაპყროთ იმ ფაქტზეც, რომ ამ ამოცანას ექნებოდა ამოხსნა იმ შემთხვევაშიც თუკი C წერტილს ავიღებდით წრფეების მეორე მხარეს, ოდნოდ არა თვითონ წრფეებზე (ამ შემთხვევას ქვემოთ განვიხილავთ შესაბამის კონტექსტში).

ნახ. 27-ის აგების შემდეგ მოსწავლეებს დავუკონკრეტოთ ის მიზანი, რომელსაც ემსახურებოდა ზემოთ მოტანილი გეომეტრიული ამოცანა: “გამოვსახოთ $\overrightarrow{AC}$ ვექტორი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების წრფივი კომბინაციით”, ანუ ვიპოვოთ ისეთი r და s რიცხვები, რომ შესრულდეს ტოლობა

$$\overrightarrow{AC} = r\vec{a} + s\vec{b}. \quad (8)$$

(შეადარეთ ეს ტოლობა (7) ტოლობას). მოსწავლეებმა წარმატებით უნდა შეძლონ ვექტორების შესახებ უკვე დაგროვილი ცოდნის რეალიზაცია ამ ამოცანის გადასაწყვეტად.



პირველ რიგში გავიხსენოთ, რომ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. ამასთანავე, კოლინეარული ვექტორების თვისებების თანახმად, არსებობენ ისეთი r და s რიცხვები, რომ $\overrightarrow{AB} = r\vec{a}$ და $\overrightarrow{AD} = s\vec{b}$, საიდანაც გამომდინარეობს (8) ტოლობა. თუკი C წერტილი l_1 ან l_2 წრფეზე ძევს, მაშინ შესაბამისად s ან r შეგვიძლია 0-ის ტოლად ჩავთვალოთ და (8) წარმოდგენა კვლავ შესაძლებელი იქნება. მაშასადამე, ვაკეთებთ მნიშვნელოვან დასკვნას, რომ ნებისმიერი $\overrightarrow{AC}$ (ანუ ნებისმიერი ვექტორი, რადგან C -ს სათანადო შერჩევით $\overrightarrow{AC}$ შეიძლება გავხადოთ სიბრტყის ნებისმიერი შესაძლო ვექტორი) წამოდგება $\vec{a}$ და $\vec{b}$

(არაკოლინეარული) ვექტორების წრფივი კომბინაციით. ცხადია $\vec{a}$ და $\vec{b}$ კოლინეარული რომ ყოფილიყო, მაშინ $r\vec{a} + s\vec{b}$ ყოველთვის $\vec{a}$ -ს და $\vec{b}$ -ს პარალელური დარჩებოდა და (8) წარმოდგენა ნებისმიერი C წერტილისთვის უკვე აღარ იქნებოდა სამართლიანი.

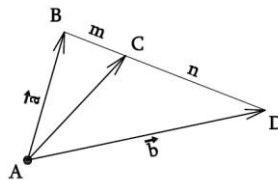
ეხლა განვიხილოთ (8) წამოდგენის ერთადერთობა, ანუ დავსვათ ასეთი კითხვა: შესაძლებელია თუ არა, იგივე $\overrightarrow{AC}$ ვექტორი გამოვსახოთ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ -ს რაიმე სხვა წრფივი კომბინაციით? ე. ი. თუკი ვიცით, რომ (8) ტოლობასთან ერთად სრულდება $\overrightarrow{AC} = r_1\vec{a} + s_1\vec{b}$ ტოლობაც, შეგვიძლია თუ არა დავასკვნათ, რომ $r = r_1$ და $s = s_1$? თუ დავუბრუნდებით ნახ. 27-ს ჩანს, რომ მასზე აგებული საძიებელი თვისებების მქონე პარალელოგრამი ერთადერთია. შესაბამისად ერთადერთია (8) წარმოდგენაც. მაგრამ, ისმის კითხვა, შეგვეძლო თუ არა იგივე დასკვნა ყოველგვარი ნახაზის გარეშე გავგვეკეთებინა? თურმე ეს შესაძლებელია ვექტორთა ალგებრის შესწავლილი თვისებების გამოყენებით. მართლაც, $\overrightarrow{AC} = r\vec{a} + s\vec{b} = r_1\vec{a} + s_1\vec{b} \Rightarrow r\vec{a} - r_1\vec{a} = s_1\vec{b} - s\vec{b} \Rightarrow (r - r_1)\vec{a} = (s_1 - s)\vec{b}$. მაგრამ ეს უკანასკნელი ტოლობა შეიძლება მაშინ და მხოლოდ მაშინ შესრულდეს, როცა ერთდროულად $r - r_1 = 0$ და $s_1 - s = 0$. მართლაც, რომელიმე მათგანი რომ 0-ისგან განსხვავებული ყოფილიყო, ვთქვათ $s_1 - s \neq 0$, მაშინ მივიღებდით $\vec{b} = \frac{r - r_1}{s_1 - s}\vec{a}$ რაც შეუძლებელია იმის გამო, რომ ეს ორი ვექტორი არაკოლინეარულია. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს ერთად აღებულით, სწორედ ამ თვისების გამო, რომ მათი წრფივი კომბინაციით

ერთადერთი გზით შეიძლება წარმოდგეს სიბრტყის ნებისმიერი სხვა ვექტორი, ეწოდება ბაზისი ამ სიბრტყის ამჯერად როგორც ზუსტი მათემატიკური ტერმინის გაგებით (ამ ცნებას ჩვენ უფრო ზუსტად ავხსნით წრფივი ალგებრისადმი მიძღვნილ თავში).

ამ პარაგრაფის მასალა შევაჯამოთ უკვე წარმოდგენილი ფაქტით, რომელსაც ჩვენ შემდგომ თავშიაც გამოვიყენებთ: თუ გვაქვს ორი თანამკვეთი წრფე l_1 და l_2 (გადაკვეთის წერტილი აღვნიშნოთ A -თი, იხ. ნახ. 27) და ნებისმიერი C წერტილი, მაშინ l_1 წრფეზე არსებობს ერთადერთი B წერტილი და l_2 წრფეზე არსებობს ერთადერთი D წერტილი ისეთი რომ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. აღნიშნული ფაქტის სამართლიანობა ჩვენ გეომეტრიულადაც წარმოვადგინეთ და ალგებრულადაც ვაჩვენეთ.

პარაგრაფის დასასრულს შემოგთავაზებთ რამოდენიმე ამოცანას, რომლთა ამოხსნასაც უკავშირდება განხილულ თემას: 1) საკოორდინატო სიბრტყეზე დასვით წერტილები $A = (1; 2)$, $B = (2; 4)$, $C = (5; 3)$, $D = (12; 10)$ და წარმოადგინეთ $\overrightarrow{AD}$ ვექტორი $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{AC}$ ვექტორების წრფივი კომბინაციით (მითითება: ეს ამოცანა შეიძლება ამოიხსნას ალგებრულად, წრფივ განტოლებათა სისტემის მეშვეობით. კარგი იქნება თუკი მიღებული პასუხი შემოწმდება გეომეტრიულადაც სათანადო ნახაზით.

ნახ.28



2) ნახ.28-ის მიხედვით $\overrightarrow{AC}$ გამოსახეთ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების წრფივი კომბინაციით, თუკი ვიცით რომ

$$BC:CD = m:n$$

$$(\text{მითითება: } \overrightarrow{BC} = \frac{m}{m+n} \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BD} = \vec{b} - \vec{a},$$

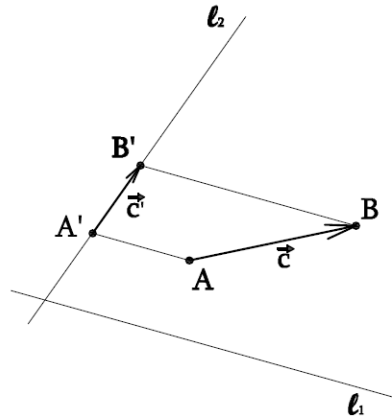
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \frac{n}{n+m} \vec{a} + \frac{m}{n+m} \vec{b}).$$

ვექტორთა პროექცია.

ვექტორთა პროექციის შესწავლას წერტილის პროექციის გახსენებით დავიწყებთ. პროექციის ანუ გეგმილის განსახილველად გვესაჭიროება ორი თანამკვეთი წრფე, ვთქვათ l_1 და l_2 , ერთი რომელზედაც დავაგეგმილებთ და მეორე რომლის გასწვრივაც დავაგეგმილებთ. ჩვენ შევინარჩუნებთ წინა პარაგრაფის აღნიშვნებს მსგავსების ხაზგასმის მიზნით. რა იქნება C წერტილის გეგმილი l_1 წრფეზე l_2 წრფის გასწვრივ? (იხ. ნახ. 27). მოსწავლეებს ხშირად პროექციას ვუხსნით სინათლის სხივისა და ჩრდილის ანალოგიით. C წერტილზე უნდა გავატაროთ l_2 წრფის პარალელური წრფე და მისი თანაკვეთა l_1 წრფესთან იქნება C -ს პროექცია, ანუ ეს გეგმილი იქნება B წერტილი. ანალოგიურად C -ს გეგმილი l_2 წრფეზე l_1 წრფის გასწვრივ იქნება D წერტილი. თუ წერტილი ეკუთვნის დასაგეგმილებელ წრფეს, მაშინ მისი პროექცია თავის თავს ემთხვევა, ხოლო თუ წერტილი ძევს იმ წრფეზე, რომლის გასწვრივაც დაპროექტირება ხდება, მაშინ მისი პროექცია ხდება l_1 და l_2 წრფეების თანაკვეთაზე.

შევვიძლია თუ არა წერტილთა დაგეგმილების ცოდნიდან ბუნებრივად გადავიღეთ

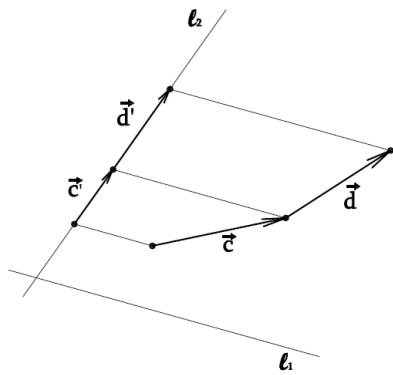
ნახ.29



ვექტორთა პროექციაზე? რატომ იქნება ნახ. 29-ზე გამოსახული $\vec{c}$ ვექტორის გეგმილი $\vec{c}'$ ვექტორი? იმიტომ, რომ ცალცალკე დავაგეგმილეთ საწყისი და საბოლოო წერტილები. ეს იყოს ვექტორის პროექციის განსაზღვრებაც. ხომ არ იქნება ეს განსაზღვრება დამოკიდებული იმაზე თუ რომელი წერტილიდანაა $\vec{c}$ ვექტორი გადაღებული (გავიხსენოთ რას

ნიშნავს ვექტორთა ტოლობა). გადავდოთ $\vec{c}$ ვექტორი სხვადასხვა წერტილიდან, გავაკეთოთ შესაბამისი აგებები და დავრწმუნდეთ, რომ მართლაც არ არის დამოკიდებული (ასეთ სიტუაციებში ვამბობთ, რომ განსაზღვრება კორექტულია). უფრო მეტიც, როდესაც გვინდა ვექტორის პროექცია მართლაც წარმოვიდგინოთ, უმჯობესია იგი გადავდოთ წრფეების თანაკვეთიდან. მაშასადამე $\overrightarrow{AC}$ ვექტორის პროექცია ნახ. 27-ის მიხედვით l_1 და l_2 წრფეებზე ყოფილა, შესაბამისად, $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{AD}$ ვექტორები (იგულისხმება l_1 -ზე პროექცია l_2 -ს გასწვრივ და l_2 -ზე პროექცია l_1 -ის გასწვრივ). ეხლა ავიღოთ l_1 -ზე და l_2 -ზე შესაბამისად რაიმე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები და თუ გავიხსენებთ წინა თავში ნასწავლ მასალას დავადგენთ შემდეგ მნიშვნელოვან ფაქტს: თუკი სრულდება (8) ტოლობა, მაშინ $\overrightarrow{AC}$ ვექტორის გეგმილები l_1 და l_2 წრფეებზე იქნებიან, შესაბამისად, $r\vec{a}$ და $s\vec{b}$ ვექტორები, ანუ რაღაც აზრით გეგმილის პოვნა შეიძლება ალგებრული გზითაც. მაგალითად $(3; -4) = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ ტოლობიდან მიიღება, რომ $(3; -4)$ ვექტორის პროექცია OX საკოორდინატო ღერძზე (OY ღერძის გასწვრივ) არის $3\vec{i}$ ვექტორი და OY ღერძზე (OX ღერძის გასწვრივ) $-4\vec{j}$ ვექტორი (თუმცა ეს ყველაფერი უშუალოდ ჩანს სათანადო ნახაზიდანაც). შევნიშნეთ, რომ როცა $l_1 \perp l_2$, როგორც ამ უკანასკნელ შემთხვევაში, მაშინ პროექციას ჰქვია *ორთოგონალური პროექცია*. სასკოლო პროგრამის მიხედვით შეისწავლება მხოლოდ ორთოგონალური პროექცია. ამ დროს საკმარისია ავირჩიოთ მხოლოდ ერთი l წრფე, რომელზედაც მოვახდენთ დაგეგმილებას. მეორე წრფის მდებარეობა (რომლის გასწვრივაც ხდება დაგეგმილება) ავტომატურად განისაზღვრება.

ეხლა დავსვათ ასეთი კითხვა: ვთქვათ $\vec{c}$ -ს პროექციაა $\vec{c}'$ და $\vec{d}$ -ს პროექციაა $\vec{d}'$. რა იქნება $\vec{c} + \vec{d}$ -ს პროექცია? ეს იქნება $\vec{c}' + \vec{d}'$. ამ დამოკიდებულებას პირდაპირ გავიაზრებთ



ნახაზის მეშვეობით; თუ $\vec{d}$ ვექტორს გადავდებთ $\vec{c}$ -ს ბოლო წერტილიდან. მას შეგვიძლია მივხვდეთ ალგებრული გზითაც: თუკი $\vec{c} = r_1\vec{a} + s_1\vec{b}$ და $\vec{d} = r_2\vec{a} + s_2\vec{b}$ მაშინ $\vec{c}' = r_1\vec{a}$, $\vec{d}' = r_2\vec{a}$ ანუ $\vec{c}' + \vec{d}' = r_1\vec{a} + r_2\vec{a}$ და ასევე $\vec{c} + \vec{d} = (r_1 + r_2)\vec{a} + (s_1 + s_2)\vec{b}$ -ის გეგმილი იქნება $(r_1 + r_2)\vec{a}$. მაშასადამე ვექტორების ჯამის პროექცია იქნება პროექციების ჯამი. ეს სიმბოლურად ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ $\text{Pr}(\vec{c} + \vec{d}) = \text{Pr}(\vec{c}) + \text{Pr}(\vec{d})$.

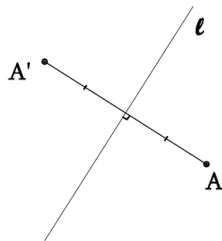
ზუსტად ანალოგიურად შესაბამისი ნახაზიდანაც და ალგებრულადაც ჩანს, რომ $\text{Pr}(s\vec{c}) = s \cdot \text{Pr}(\vec{c})$ ანუ რიცხვზე გამრავლებული ვექტორის პროექცია იგივეა რაც დაპროექტებული ვექტორის იმავე რიცხვზე გამრავლება.

შემდგომში ჩვენ განვსაზღვრავთ წრფივ ასახვას და ვნახავთ, რომ ამ ორი უკანასკნელი თვისების გამო, პროექცია წარმოადგენს წრფივი ასახვის (გარდაქმნის) მაგალითს.

სიბრტყის გარდაქმნები.

სიბრტყის ძირითად გარდაქმნებს, როგორიცაა ღერძული სიმეტრია, ცენტრული სიმეტრია, პარალელური გადატანა, მობრუნება, მოსწავლეები ეცნობიან სწავლების სხვადასხვა საფეხურზე ეროვნული სასწავლო პროგრამის შესაბამისად. ამ გარდაქმნებს მათ მასწავლებელი თვალსაჩინო ილუსტრაციებითა და სათანადო მოძრაობების წარმოდგენის მეშვეობით უხსნის, რითაც მასალის აღქმის დამაკმაყოფილებელი დონე

ნახ.31



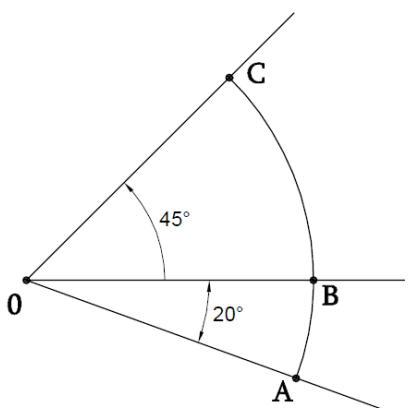
შეიძლება იქნეს მიღწეული. ამ ცნებების შინაარსში უფრო ღრმად გარკვევის მიზნით, ყოველ შემთხვევაში მასწავლებელთათვის მაინც, კარგი იქნებოდა მათი მათემატიკურად ზუსტი განსაზღვრებაც ჩამოგვეყალიბებინა. გეომეტრია არსებითად სტატიკური ანუ უძრავი ფიგურების შემსწავლელი მეცნიერებაა და იმგვარი სიტყვებით ოპერირება როგორიცაა “გადატანა”, “გადაკეცვა”, “მობრუნება” საქმის ვითარების მხოლოდ ინტუიციურ დონეზე გარკვევაში დაგვეხმარება და ვერ გამოგვადგება ცნების

ზუსტად ფორმულირებისას.

ერთიანი თვალსაზრისის შესამუშავებლად ზემოთ ჩამოთვლილი გარდაქმნების მიმართ, სიბრტყის წერტილთა ის ფიზიკური მოძრაობა, რაც ბუნებრივად წარმოგვიდგენია თითოეული ამ გარდაქმნებით, უნდა შეიცვალოს დაზუსტებული

მათემატიკური ტერმინით “შესაბამისობით” მაგალითად თუ სიბრტყეზე მოცემულია l წრფე, მაშინ სიმეტრია l -ის მიმართ ეს არის შესაბამისობა ანუ **ფუნქცია**, რომელიც სიბრტყის ყოველ A წერტილს უთანადებს ისეთ A' წერტილს, რომ l წრფე AA' მონაკვეთის შუამართობი გამოვიდეს. რამდენადაც ფუნქცია ცხად მათემატიკურ ცნებას წარმოადგენს, რომლის სიმრავლეთა თეორიის საფუძვლებზე დაყრდნობილი ზუსტი განსაზღვრაც გაგვაჩნია, გარდაქმნათა განსაზღვრა ფუნქციის ცნების მოშველიებით სწორედაც წარმოადგენს სიზუსტის იმ დონეს, რომელიც მიზნად გვქონდა დასახული. გასაგებია როგორ ჩამოყალიბდება ანალოგიური, ასახვის ცნებაზე დაყრდნობილი, განსაზღვრებები ცენტრული სიმეტრიის, პარალელური გადატანის (რომელიც, როგორც უკვე ვნახეთ, დაემთხვევა ვექტორის როგორც ფუნქციის განსაზღვრას), მობრუნების (მოცემული წერტილის გარშემო, მოცემული კუთხით) თუ გნებავთ ჰომოთეტიისაც. ზოგადად ნახსენები იქნება, რომ მოცემული გარდაქმნა არის შესაბამისობა (ასახვა, ფუნქცია), რომელიც სიბრტყის ყოველ წერტილს უთანადებს გარკვეული წესით განსაზღვრულ სხვა წერტილს. ამ წესს თითოეული გარდაქმნისთვის ცალ-ცალკე იმედია თვითონვე ჩამოაყალიბებს მკითხველი. როგორც §2-ში ავღნიშნეთ, შემოტანილი თვალსაზრისის გაზიარება შეიძლება ბოლომდე გასაგებად ვერ მოხერხდეს მოსწავლეთათვის გარდაქმნათა შესწავლისას, მაგრამ თვითონ ფუნქციის ცნებაზე საუბრებისას მასწავლებელმა შეიძლება გამოიყენოს გეომეტრიული გარდაქმნები როგორც ფუნქციის მაგალითები.

მოდით ნახ. 31-ზე გამოსახული გარდაქმნა (ღერძული სიმეტრია) ჩავწეროთ ფუნქციის (ასახვის) ტერმინებში. როგორ იწერება ის ფაქტი, რომ $f(x) = 2x + 5$ ფუნქცია 3-ს ასახავს 11-ში? $f(3) = 11$. მაშასადამე თუკი l წრფით განსაზღვრულ ღერძულ სიმეტრიას, როგორც ფუნქციას, აღვნიშნავთ იმავე l ასოთი (იგივე ნიშნით აღვნიშნავთ არ უნდა გამოიწვიოს ორაზროვნება) როგორ ჩაიწერება ნახ. 31-ზე გამოხატული დამოკიდებულება A და A' წერტილებს შორის? ალბათ ვხვდებით $l(A) = A'$. რა იქნება $l(A')$ (ანუ A' -ის სიმეტრიული წერტილი)? თუკი $l(P) = P$, მაშინ რა შეგვიძლია ვთქვათ P წერტილზე? (პასუხი: P აუცილებლად ძევს l წრფეზე).

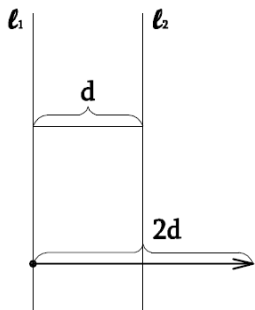


როდესაც გეომეტრიული გარდაქმნების შესახებ ვსაუბრობთ ფიზიკური მოძრაობების ენაზე, ხანდახან გვესაჭიროება განვიხილოთ სიტუაცია როცა ეს მოძრაობები ხდება ერთმანეთის თანმიმდევრობით. ვთქვათ სიბრტყის წერტილები ჯერ მოვაბრუნეთ რაიმე O წერტილის მიმართ 20° -ით და შემდეგ კიდევ მოვაბრუნეთ 45° -ით. მთლიანობაში რა სახის მოძრაობა შევასრულეთ ამ მოძრაობის შედეგად? ცხადია, სიბრტყის თითოეული წერტილი მოვაბრუნეთ $20^\circ + 45^\circ = 65^\circ$ -ით. თუ ეხლა ამ მობრუნებებს განვიხილავთ როგორც ფუნქციებს და მათთვის სათანადო აღვნიშვნებს შემოვიღებთ $R_O^{20^\circ}$, $R_O^{45^\circ}$

და ა.შ. (R -ს ვხმარობთ სიტყვა Rotation-ის აღსანიშნად, ქვედა ინდექსი აღნიშნავს მობრუნების ცენტრს, ხოლო ზედა ინდექსი მობრუნების კუთხეს). რა დამოკიდებულება იქნება ნახაზზე გამოსახულ წერტილებს შორის? მოდით დავაკვირდეთ $B = R_O^{20^\circ}(A)$, $C =$

$R_o^{45^\circ}(B) = R_o^{45^\circ}(R_o^{20^\circ}(A)) = R_o^{65^\circ}(A)$. მაშასადამე საბოლოო მობრუნება $R_o^{65^\circ}$, როგორც ასახვა სიბრტყის წერტილებს შორის, წარმოადგენს $R_o^{20^\circ}$ და $R_o^{45^\circ}$ ასახვების კომპოზიციას: $R_o^{65^\circ} = R_o^{45^\circ} \circ R_o^{20^\circ}$.

ნახ.33 კარგი სავარჯიშო იქნება სხვა ამგვარი ამოცანების ამოხსნა-გააზრება. “ვთქვათ მოცემულია ორი პარალელური წრფე l_1 და l_2 , რომელთა შორის მანძილი რაღაც d რიცხვია. რა იქნება $l_2 \circ l_1$, ანუ ჯერ l_1 ღერძის მიმართ სიმეტრია და შემდეგ l_2 -ის მიმართ”. პასუხი ცოტა უცნაურად გამოიყურება $l_2 \circ l_1$ არის პარალელური გადატანა წრფეების ვერტიკალური მიმართულებით, l_1 -დან l_2 -ისკენ $2d$ მანძილით (გამოსახეთ ნახატზე შესაბამისი ვექტორი). იგივე ამოცანა



უფრო გართულებოდა ამ წრფეებს თანაკვეთა რომ ჰქონოდათ. ამ შემთხვევაში კომპოზიცია გამოვიდოდა მობრუნება!

უხლა დავუკვირდეთ, რა იქნება ორი ვექტორის (როგორც ორი ფუნქციის) კომპოზიცია. ესე იგი ჯერ უნდა გავაკეთოთ ერთი პარალელური გადატანა და შემდეგ მეორე. ამ ასახვების კომპოზიცია იქნება ამ ვექტორების ჯამი. ანუ ამით ჩვენ გავეცით პასუხი §3-ში ვექტორთა ჯამის ახსნის ბოლოს დასმულ კითხვას. აღვნიშნავთ აქვე, რომ ვექტორთა შეკრების ასოციაციურობის თვისება $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ ზოგადად ფუნქციათა კომპოზიციის ბუნებრივი თვისებაა: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, მაშინ როცა თავად ეს ოპერაცია არ არის კომუტაციური $g \circ f \neq f \circ g$.

გარდა ამისა, რომ ჩვენ სიბრტყის გარდაქმნები დავახასიათეთ როგორც ფუნქციები, მათ ყველას (ჰომოთეტიის გარდა) გააჩნიათ კიდევ ერთი საინტერესო საერთო თვისება, რომელზედაც ღირს ყურადღების გამახვილება. ეს თვისება გახლავთ ის, რომ თითოეული მათგანი წარმოადგენს გადაადგილებას, ანუ მანძილების შემნახავ გარდაქმნას. გადაადგილების ქვეშ ვგულისხმობთ ზუსტ მათემატიკურ ტერმინს და არა შესაბამის სიტყვას სალიტერატურო ენაში. მოდით გავაერთიანოთ ალგებრული და გეომეტრიული აღნიშვნები ამ ცნების განსაზღვრის ჩამოსაყალიბებლად: “ვთქვათ f არის რაიმე ასახვა სიბრტყის წერტილებს შორის, ე.ი f არის ფუნქცია, რომლის განსაზღვრის არეც და მნიშვნელობათა სიმრავლეც არის სიბრტყე. ვიტყვით, რომ f არის გადაადგილება თუკი $|f(A)f(B)| = |AB|$ სიბრტყის ნებისმიერი A და B წერტილებისათვის”, ანუ თუ ყოველ ორ წერტილს შორის მანძილი იგივეა რაც მათ ანასახებს შორის მანძილი. იმის მტკიცება, რომ თითოეული ეს გარდაქმნა, ღერძული და ცენტრული სიმეტრიები, პარალელური გადატანა ანუ ვექტორი, მობრუნება, არის გადაადგილება, წარმოადგენს სათანადო გეომეტრიულ ამოცანას, რომლის დამოუკიდებელ ამოხსნასაც (შესაფერისი ნახატის გაკეთებით) ვურჩევდით მკითხველს.

ნებისმიერი ორი გადაადგილების კომპოზიცია ისევ გადაადგილებაა. საინტერესოა, რომ ეს ფაქტი პირდაპირ შეიძლება დამტკიცდეს სათანადო ალგებრული ჩანაწერებით, ყოველგვარი გეომეტრიული სურათების გარეშე. მართლაც, თუ f და g გადაადგილებებია, მაშინ

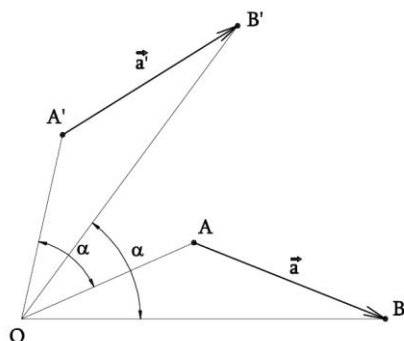
$$|g \circ f(A) \ g \circ f(B)| = |g(f(A)) \ g(f(B))| = |f(A)f(B)| = |AB|$$

რაც ნიშნავს, რომ $g \circ f$ -იც გადაადგილებაა. შეიძლება იმის დამტკიცებაც, რომ სიბრტყის ნებისმიერი გადაადგილება (მანძილების შემნახავი გარდაქმნა) შეიძლება წარმოდგეს როგორც ამ სამი გარდაქმნის (პარალელური გადატანის, მობრუნების და ღერძული სიმეტრიის) კომპოზიცია.

გადაადგილების ცნება, რომელიც ჩვენ შემოვიტანეთ, უმნიშვნელოვანეს როლს თამაშობს გეომეტრიის საწყისი ცნებების სწორ გააზრებაში. კერძოდ მისი საშუალებით შეგვიძლია მათემატიკურად ზუსტად ჩამოვყალიბოთ გეომეტრიის (ერთ-ერთი) ყველაზე მნიშვნელოვანი ცნება *კონგრუენტულობა*, რომელიც მის გარეშე მხოლოდ ინტუიციურად შეგვეძლო წარმოგვედგინა. “ F_1 და F_2 ფიგურები კონგრუენტულია, $F_1 \cong F_2$, თუკი არსებობს F_1 -ის ურთიერთცალსახა ასახვა F_2 -ზე, რომელიც ამასთანავე გადაადგილებაა.” კონგრუენტულობას სიბრტყის ფიგურათა შორის შემოაქვს ექვივალენტობის მიმართება, რომელიც აერთიანებს კონგრუენტულ ფიგურებს ერთ კლასში. (ვინაიდან ყველა ამ ცნების გააზრება რთულია მოსწავლეთათვის, კონგრუენტულობა არ შემოდის სასკოლო პროგრამაში და მის ნაცვლად იხმარება უბრალოდ *ტოლობა*. სიმრავლეთა თეორიის თვალსაზრისით “ტოლობის” ხმარება “კონგრუენტულობის” ნაცვლად არ არის ზუსტი, თუმცა მოსწავლეთათვის ინტუიციურ დონეზე მისახვედრად ეს დასაშვებია.) იმის გამო, რომ გადაადგილებათა კომპოზიცია ისევ გადაადგილებაა, ფიგურათა კონგრუენტულობას გააჩნია ტრანზიტულობის თვისება: $F_1 \cong F_2$ და $F_2 \cong F_3 \Rightarrow F_1 \cong F_3$. ანუ თუკი f აწყობს ურთიერთცალსახა მანძილების შემნახავ ასახვას F_1 -სა და F_2 -ს შორის და g ასეთივე ასახვაა F_2 -სა და F_3 -ს შორის მაშინ $g \circ f$ მოახდენს F_1 -ის გადაადგილებას F_3 -ში.

ვექტორთა მობრუნება.

ნახ.34

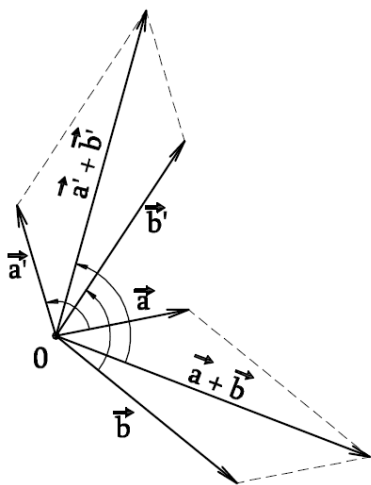


წინა თავში განხილული სიბრტყის გარდაქმნები შეგვიძლია ბუნებრივად განვავრცოთ ვექტორებზე და ვისაუბროთ, მაგალითად, ვექტორის სიმეტრიულ ვექტორზე, მობრუნებულ ვექტორზე და ა.შ. სწორედ ეს უკანასკნელი შემთხვევაა ყველაზე საინტერესო მისი გამოყენების გამო, ამიტომ ჩვენ დაწვრილებით განვიხილავთ მხოლოდ ვექტორთა

მობრუნებას. ვთქვათ გვაქვს სიბრტყის წერტილათა მობრუნება O ცენტრის გარშემო

α კუთხით R_o^α (წინასწარ შევნიშნოთ, რომ α -მ შეიძლება მიიღოს ნებისმიერი მნიშვნელობა როგორც დადებითი ისე უარყოფითი. შეგახსენებთ რომ α -ს დადებითი მნიშვნელობებისათვის მობრუნება ხდება საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით, ხოლო α -ს უარყოფითი მნიშვნელობებისათვის -- საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით). ბუნებრივად გამოიწვევს თუ არა წერტილათა ამგვარი მობრუნება ვექტორთა მობრუნებასაც? ანუ შეგვიძლია თუ არა იგივე R_o^α განვიხილოთ როგორც სიბრტყის ვექტორთა სიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქცია? მართლაც, ავიღოთ ნებისმიერი $\vec{a}$ ვექტორი და დავუშვათ $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. მოვაბრუნოთ A და B წერტილები: $A' = R_o^\alpha(A)$ და $B' = R_o^\alpha(B)$, და $\vec{a}$ -ს მობრუნება ვუწოდოთ $\overrightarrow{A'B'}$ ვექტორს: $R_o^\alpha(\vec{a}) = \overrightarrow{A'B'}$. უნდა შევნიშნოთ, რომ ეს განსაზღვრება კორექტულია, ანუ $\vec{a}$ ვექტორი სხვა ადგილას რომ გამოგვეხატა (სხვა წერტილიდან გადაგვედო) და შემდეგ მოგვებრუნებინა, მივიღებდით იმავე $\vec{a'}$ -ს სხვა წერტილიდან გადადებულს. უფრო მეტიც, ვექტორების მობრუნების განხილვისას მნიშვნელობა არა აქვს თუ სად ავიღებთ მობრუნების ცენტრს, O წერტილს. თუ რა ვექტორი მიიღება $\vec{a}$ -ს მობრუნებისას, დამოკიდებულია მხოლოდ α კუთხეზე. ამიტომ $R_o^\alpha(\vec{a})$ -ს მაგივრად პირდაპირ შეგვიძლია დავწეროთ $R^\alpha(\vec{a})$. როდესაც გეომეტრიულად გვინდა განვიხილოთ R^α როგორც სიბრტყის ვექტორთა სიმრავლეზე განსაზღვრული ასახვა, მობრუნების ცენტრადაც და ყველა ვექტორის სათავედაც ერთიდაიგივე O წერტილი ავიღოთ. თუ ვექტორები გამოხატულია როგორც რადიუს ვექტორები საკოორდინატო სიბრტყეზე, მაშინ ბუნებრივად მობრუნების ცენტრადაც კოორდინატთა სათავე ჩავთვალოთ. მაშინ კარგად წარმოვიდგენთ R^α მობრუნების თვისებებსაც. კერძოდ, შემდგომში ჩვენ გამოვიყენებთ R_o^α წრფივობას (იხ. §14), რაც გამოიხატება შემდეგი ორი ტოლობით:

- 1) $R^\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = R^\alpha(\vec{a}) + R^\alpha(\vec{b})$
- 2) $R^\alpha(s\vec{a}) = sR^\alpha(\vec{a})$



ამ ტოლობების სმართლიანობა კარგად ჩანს შესაფერისი ნახაზიდან. თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს გადავდებთ ერთიდაიგივე O წერტილიდან, დავხატავთ შესაბამის პარალელოგრამს, რომლის დიაგონალიც იქნება $\vec{a} + \vec{b}$ და მოვაბრუნებთ მთლიან პარალელოგრამს α კუთხით, დავინახავთ რომ მობრუნებული ჯამი $\vec{a'} + \vec{b'}$ იგივეა რაც მობრუნებული შესაკრებების ჯამი, რაც გამოხატავს (1) ტოლობის შინაარსს. ანალოგიურად შეგვიძლია დავხატოთ (2) ტოლობის გამომხატველი სურათიც.

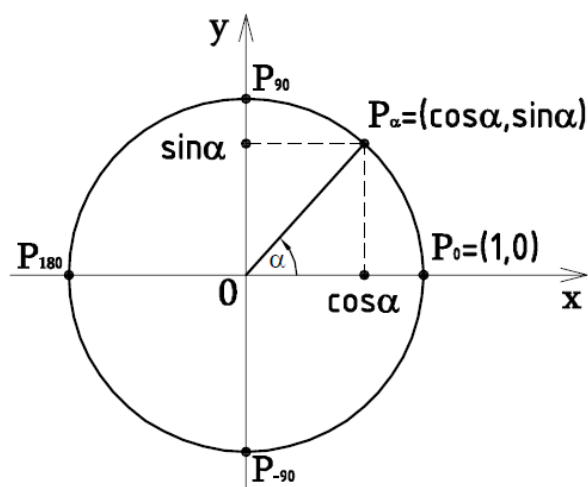
(1)-(2) ტოლობების მნიშვნელოვან გამოყენებას ჩვენ გავცნობით შემდგომ პარაგრაფში, როდესაც ვექტორების გამოყენებით დავამტკიცებთ ძირითად ტრიგონომეტრიულ იგივეობებს.

ვექტორები და ტრიგონომეტრიული ფუნქციები.

ძირითადი ტრიგონომეტრიული ფუნქციების $\cos$ -ის და $\sin$ -ის განსაზღვრა საწყის ეტაპზე ხდება შესაბამის მართკუთხა სამკუთხედში ცნობილი დამოკიდებულებების გამოხატვით. ამ შემთხვევაში სიდიდე α , რომლისთვის უნდა განვსაზღვროთ $\cos \alpha$ და $\sin \alpha$, შეიძლება აღებული იქნას მხოლოდ 0° -სა და 90° -ს შორის, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. ხშირად წავაწყდებით ხოლმე სიტუაციას, როდესაც მაღალი კლასის მოსწავლემ იცის, რომ მაგალითად $\cos 180^\circ = -1$ და $\sin 180^\circ = 0$, მაგრამ გააზრებული არ აქვს თუ რატომ სრულდება ეს ტოლობები. შეიძლება დარწმუნებულიც არ იყოს მათ სამართლიანობაში, რადგან ეს ტოლობები დამახსოვრებული აქვს (შეიძლება მასწავლებლის მითითებითაც) ხოლო ამგვარი დამოკიდებულებები ტრიგონომეტრიაში იმდენად მრავალია, რომ მათი სწორად დამახსოვება უბრალოდ შეუძლებელია. სამწუხაროდ მრავლადაა ისეთი შემთხვევებიც, როდესაც მოსწავლე საერთოდ ვერ ხვდება ტრიგონომეტრიული ფუნქციების შინაარსს, რითაც მისთვის მთლიანად გაუგებარი ხდება ტრიგონომეტრია. უკვე განხილული თემები საშუალებას გვაძლევს კიდევ ერთი ნაბიჯით წავიწიოთ წინ, რათა უკეთ ჩავწვდეთ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ძირითად თვისებებს. წინამდებარე პარაგრაფის მასალა სწორედ ამ მიზანს ემსახურება.

$\cos$ და $\sin$ ფუნქციები α კუთხის ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის (არა მხოლოდ 0° -დან 90° -მდე მნიშვნელობებისათვის, როგორც ეს მართკუთხა სამკუთხედშია) ერთეულოვან წრეწირზე წერტილების მობრუნების საშუალებით უნდა განისაზღვროს. ამ დროს განსაზღვრება მარტივ, მკაფიო და იოლად დასამახსოვრებელ ფორმას იღებს. ახალი ფაქტიურად არაფერია, საჭიროა მხოლოდ ცნობილი ცნებები

(წერტილისკოორდინატები, მობრუნება) კარგად გავიაზროთ.



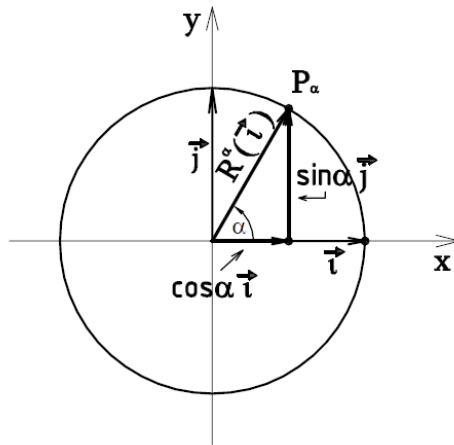
დავხაზოთ საკოორდინატო სისტემაზე ერთეულოვანი რადიუსის წრეწირი და წერტილს კოორდინატებით $(1; 0)$ დავარქვათ P_0 , რადგან $\overrightarrow{OP_0}$ ვექტორი Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან 0° -იან კუთხეს ადგენს. საზოგადოდ P_α წერტილი იყოს P_0 -ის მობრუნება სათავეს მიმართ α კუთხით, $P_\alpha = R_\alpha^0(P_0)$ (ნიმუშისთვის ნახატზე გამოსახულია P_{90} , P_{180} და P_{-90} . შევნიშნით ასევე, რომ $P_{-90} =$

P_{270}). მაშინ $\cos \alpha$ და $\sin \alpha$ შესაბამისად განისაზღვრება, როგორც P_α წერტილის I და II კოორდინატები, ანუ

$$P_\alpha = (\cos \alpha, \sin \alpha) \quad (1)$$

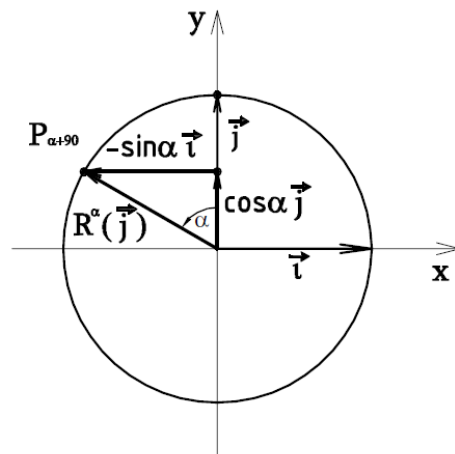
(რამდენადაც წერტილები და მისი კოორდინატები გაიგივებული გვაქვს). (1) განსაზღვრა უკვე საშუალებას გვაძლევს შინაარსიდან გამომდინარე ვიცოდეთ (ყოველგვარი წინასწარი დაზეპირების გარეშე), რომ $\cos 180^\circ = -1$ და $\sin 180^\circ = 0$ და აგრეთვე მსგავსი დამოკიდებულებები. აუცილებლად გავიზროთ ისიც, რომ $\cos$ -ის და $\sin$ -ის ახალი განსაზღვრება ემთხვევა მათ ძველ, მართკუთხა სამკუთხედიდან გამომდინარე განსაზღვრებას.

ნახ.37



ტოლობის სამართლიანობაში). ოდნავ უფრო ძნელია

ნახ.38



მოდით მოვაბრუნოთ არა მარტო წრეწირის წერტილები, არამედ სტანდარტული ბაზისის $\vec{i}$ და $\vec{j}$ ვექტორებიც და ვნახოთ რა სახე ექნებათ მობრუნებულ ვექტორებს ამავე ბაზისში (იხ. 10, 6). (1) ტოლობიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ

$$R^\alpha(\vec{i}) = \overrightarrow{OP_\alpha} = \cos \alpha \cdot \vec{i} + \sin \alpha \cdot \vec{j} \quad (2)$$

(დავაკვირდეთ ნახ. 37-ს რათა კარგად დავრწმუნდეთ ამ ვექტორისთვის. მიუხედავად ამისა, თუ კარგად დავაკვირდებით ნახ. 38-ზე გამოსახულ ვექტორულ ტოლობებს და მათ სიგრძეებს, დავრწმუნდებით, რომ

$$R^\alpha(\vec{j}) = -\sin \alpha \cdot \vec{i} + \cos \alpha \cdot \vec{j} \quad (3)$$

მივაქციოთ ყურადღება იმასაც, რომ (2) და (3) ტოლობები სამართლიანია არა მარტო მაშინ როცა $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, არამედ α -ს ყოველი მნიშვნელობისთვის. მათი საშუალებით ჩვენ ეხლა

დავამტკიცეთ ძირითად ტრიგონომეტრიულ იგივეობებს $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$, (4)

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha \quad (5)$$

ამ დამტკიცებას ჩავატარებთ ალგებრულად ყოველგვარი დამატებითი ნახაზების გარეშე, თუმცა გამოვიყენებთ ფაქტიურად ყველა თვალსაზრისს რაც კი აქამდე განვახილეთ ვექტორების შესახებ.

თუ (2) ტოლობას ჩავწერთ $\alpha + \beta$ კუთხისათვის გვექნება

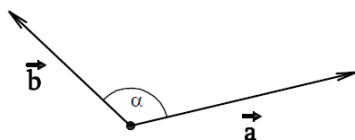
$$R^{\alpha+\beta}(\vec{i}) = \cos(\alpha + \beta) \cdot \vec{i} + \sin(\alpha + \beta) \cdot \vec{j}$$

ამასთანავე $R^{\alpha+\beta}(\vec{i}) = R^\beta(R^\alpha(\vec{i}))$ {რადგან მობრუნებების კომპოზიციისას კუთხეები იკრიბება} $= R^\beta(\cos \alpha \cdot \vec{i} + \sin \alpha \cdot \vec{j})$ {(2) ტოლობის ძალით} $= \cos \alpha \cdot R^\beta(\vec{i}) + \sin \alpha \cdot R^\beta(\vec{j})$ {რადგან R^β წრფივი ასახვაა, იხ. §10} $= \cos \alpha (\cos \beta \vec{i} + \sin \beta \vec{j}) + \sin \alpha (-\sin \beta \vec{i} + \cos \beta \vec{j})$

{(2) და (3) ტოლობების გამო} = $\cos \alpha \cos \beta \cdot \vec{i} + \cos \alpha \sin \beta \cdot \vec{j} - \sin \alpha \sin \beta \cdot \vec{i} + \sin \alpha \cos \beta \cdot \vec{j} = (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \cdot \vec{i} + (\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) \cdot \vec{j}$ (იხ. §3, §4)
 რადგან ერთიდაიგივე ვექტორი არ შეიძლება წარმოადგეს საბაზისო ვექტორების წრფივი კომბინაციით სხვადასხვა გზით, $R^{\alpha+\beta}(\vec{i})$ ვექტორის ორ სხვადასხვა ჩანაწერში ერთმანეთს ვუტოლებთ $\vec{i}$ -ის და $\vec{j}$ -ის წინ მდგომ კოეფიციენტებს და ვასკვნით (4) და (5) ტოლობების სამართლიანობას. მივაქციოთ ყურადღება რომ ორივე ტოლობა ერთდროულად დამტკიცდა.

ვექტორთა სკალარული ნამრავლი.

ნახ.39



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a b \cos \alpha$$

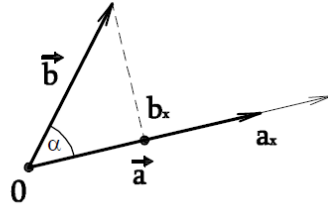
ალგებრული მეთოდების შემოტანა გეომეტრიაში კიდევ უფრო მძლავრად ხერხდება ვექტორთა სკალარული ნამრავლის განსაზღვრით. როგორც ვიცით ორი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორის სკალარული ნამრავლი ეწოდება მათი სიგრძეებისა და მათ შორის მდებარე კუთხის კოსინუსის ნამრავლს. ხაზი გავუსვათ, რომ

სკალარული ნამრავლის ოპერაციას ვატარებთ ორ ვექტორზე და პასუხად ვღებულობთ რიცხვს. თავიდანვე უნდა აღინიშნოს, რომ ($\cos$ -ის თვისებებიდან გამომდინარე) ეს რიცხვი დადებითია როცა $0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$, უარყოფითია როცა $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$ და 0-ია როცა $\alpha = 90^\circ$ (იგულისხმება, რომ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ არანულოვანი ვექტორებია). უმეტესწილად სწორედ ამ უკანასკნელი თვისების გამო ჰპოვებს ვექტორთა სკალარული ნამრავლი გამოყენებებს, როცა $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების მიმართულებებით განსაზღვრული წრფეების ორთოგონალურობა, $\vec{a} \perp \vec{b}$, შეიძლება ალგებრულად შემოწმდეს იმის დადგენით, რომ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. თავად ვექტორის სიგრძეც შეიძლება გამოისახოს სკალარული ნამრავლით $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$.

სკალარული ნამრავლის დისტრიბუციულობის თვისება (განრიგებადობის კანონი)

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \quad (1)$$

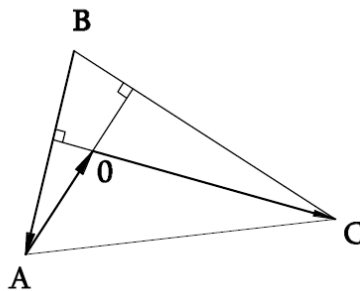
იოლი დასამახსოვრებელია, რადგან ის ზუსტად ჰგავს ჩვეულებრივი რიცხვებისთვის
ნახ.40



კარგად ცნობილ წესს. (ცხადია აგრეთვე, უშუალოდ განსაზღვრებიდან გამომდინარე, რომ $(sa) \cdot b = s(a \cdot b)$, $a \cdot b = b \cdot a$ და $0 \cdot a = 0$.) ხომ არ არის შესაძლებელი რაღაც თვალსაზრისიდან გამომდინარე პირდაპირ შევამჩნიოთ (1) ტოლობის სამართლიანობა სწორედ რიცხვებისთვის ანალოგიურ ტოლობაზე დაყრდნობით. მართლაც, მოვიქცეთ შემდეგნაირად: $\vec{a}$ ვექტორის

გასვრივ გავავლოთ OX რიცხვითი ღერძი, რომლის სათავეც იყოს O წერტილი (იხ. ნახ 40). ყოველი ვექტორი წამოვიდგინოთ O წერტილიდან გადაღებული და მას შევუსაბამოთ მისი ბოლო წერტილის ორთოგონალური გეგმილის კოორდინატი რიცხვით ღერძზე. მაშინ ყოველ ვექტორს შეესაბამება მისი პროექციის სიგრძე აღებული "+" ნიშნით თუკი პროექციის მიმართულება ემთხვევა OX ღერძის მიმართულებას და "-" ნიშნით თუკი ეს მიმართულებები საპირისპიროა. საზოგადოდ, თუკი $\vec{v}$ ვექტორის შესაბამის რიცხვს ავღნიშნავთ v_x -ით, მაშინ $a_x = |\vec{a}|$ და $b_x = |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$ (იხ. ნახ. 40), საიდანაც ვღებულობთ $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x$, ანუ სკალარული ნამრავლი ჩავწერეთ გეგმილების ჩვეულებრივი რიცხვების ნამრავლით და ეს ტოლობა სამართლიანია ყველა ვექტორისათვის, კერძოდ $\vec{a} \cdot \vec{c} = a_x c_x$. თუ გავიხსენებთ ეხლა ვექტორების ჯამის პროექციის თვისებებს, რომლის ძალითაც $\vec{b} + \vec{c}$ ვექტორის შესაბამისი რიცხვი გამოვა $b_x + c_x$, ბუნებრივად მივიღებთ. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = a_x(b_x + c_x) = a_x b_x + a_x c_x = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

ნახ.41



სანიშნოდ მოდით ვექტორთა სკალარული ნამრავლი და მისი თვისებები გამოვიყენოთ ცნობილი თეორემის დასამტკიცებლად, რომ ნებისმიერ სამკუთხედში სიმაღლეები ერთ წერტილში იკვეთებიან. ავიღოთ ABC სამკუთხედი, გავატაროთ ორი სიმაღლე, რომლებიც O წერტილში იკვეთებიან და ვაჩვენოთ, რომ $\vec{BO} \perp \vec{AC}$. მართლაც $\vec{BO} \cdot \vec{AC} = (\vec{BA} + \vec{AO})(\vec{AO} + \vec{OC}) = \vec{BA} \cdot \vec{AO} +$

$$\vec{AO} \cdot \vec{AO} + \vec{AO} \cdot \vec{OC} \quad (\text{რადგან } \vec{BA} \cdot \vec{OC} = 0) = \vec{AO}(\vec{BA} + \vec{AO} + \vec{OC}) = \vec{AO} \cdot \vec{BC} = 0.$$

ვექტორების გამოყენება ამოცანების ამოხსნისას

ვექტორთა მეშვეობით უამრავი სხვადასხვა გეომეტრიული ამოცანის ამოხსნა შესაძლებელია. ამ მეთოდის ზოგადი დახასიათებისას საინტერესოა ავღნიშნოთ, რომ წმინდა გეომეტრიული ამოცანები სხვადასხვა ფიგურათა გარკვეული თვისებების შესახებ ფაქტიურად ალგებრული გზებითაა გადაწყვეტილი. ჩვენ უკვე განვიხილეთ ორი ასეთი ამოცანა მე-4 და მე-11 ქვეთავების დასასრულს. ამავე ნიშნით შერჩეულ კიდევ ორი ამოცანის ამოხსნას მოვიტანთ საილუსტრაციოდ, რომელთა დაკვირვებით გაანალიზება არამარტო განხილული თემების გამოსადეგობაში დაარწმუნებს მკითხველს, არამედ მათი მათემატიკური გამოვლენების ფორმირებასაც შეუწყობს ხელს.

1) დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერ სამკუთხედში მედიანები ერთ წერტილში იკვეთება და ამასთანავე გადაკვეთს წერტილით თითოეული იყოფა შეფარდებით 2:1-თან (გადათვლილი წვეროს მხრიდან). ცხადია ამ ამოცანის “გეომეტრიული” ამოხსნაც არსებობს, მაგრამ ჩვენ შემოგთავაზებთ “წმინდა ალგებრულ” ამოხსნას.

ავიღოთ ნებისმიერი ABC სამკუთხედი და გავავლოთ მასში ნებისმიერი წვეროდან მედიანა, ვთქვათ BM . ავიღოთ ამ მედიანაზე O წერტილი ისე, რომ $|BO|:|OM| = 2:1$ ეხლა მარტივად ვაჩვენოთ, რომ

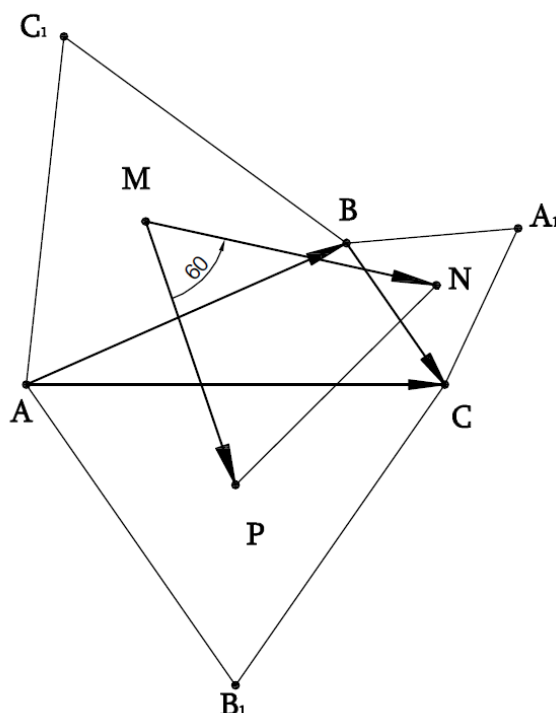
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \quad (1)$$

მართლაც $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA}) + \overrightarrow{OB} + (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MC}) = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) + (2\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OB}) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$. ვინაიდან ჩვენ ეს ტოლობა ნებისმიერი მედიანისათვის დავამტკიცეთ, სხვა წერტილიდან გამომავალი მედიანაც რომ დაგვეხატა და მისთვის ანალოგიური O' აგვეღო, ზუსტად ისევე გვექნებოდა

$$\overrightarrow{O'A} + \overrightarrow{O'B} + \overrightarrow{O'C} = \vec{0}. \quad (2)$$

ამოცანის ამოხსნა დასრულდება, თუკი ვაჩვენებთ რომ (1) თვისების მქონე O წერტილი ერთადერთია, (გამოვა, რომ ეს წერტილი ეკუთვნის ყველა მედიანას) ანუ თუ (1) ტოლობაც სრულდება და (2)-ც, მაშინ $O = O'$. ამის ჩვენება კი შემდეგნაირად მოხერხდება: $\vec{0} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = (\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A}) + (\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'B}) + (\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'C}) = 3\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A} + \overrightarrow{O'B} + \overrightarrow{O'C} = 3\overrightarrow{OO'}$, მაშასადამე $\overrightarrow{OO'} = \vec{0}$ რაც ნიშნავს იმას რომ $O = O'$.

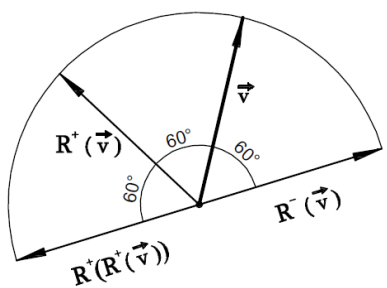
2) ვექტორების გამოყენებით დავამტკიცოთ ე.წ. **ნაპოლეონის თეორემა**, რომელიც შემდგომში მდებარეობს: ნებისმიერ ABC სამკუთხედის გვერდებზე აგებულია ტოლგვერდა სამკუთხედები AC_1B , BA_1C და ABC_1 . უნდა დაამტკიცოთ, რომ ამ სამკუთხედების ცენტრებისგან შედგენილი სამკუთხედი MNP ასევე ტოლგვერდაა. (იხ. ნახ. 42).



თეორემის დასამტკიცებლად ასეთი სტრატეგია შევიშუშავოთ. ვაჩვენოთ, რომ $\vec{MP}$ ვექტორს თუ 60° -ით მოვაბრუნებთ, მივიღებთ $\vec{MN}$ ვექტორს. ვინაიდან ვექტორი მობრუნებით სიგრძეს არ იცვლის, ამით ვაჩვენებთ, რომ PMN სამკუთხედი ტოლგვერდაა.

წვეროსთან მდებარე 60° -იანი კუთხით, ანუ ტოლგვერდაცაა.

შემოვიტანოთ აღნიშვნები. R^+ იყოს სიბრტყის ვექტორთა გარდაქმნა, კერძოდ 60° -ით მობრუნება (ჩვენ უნდა ვაჩვენოთ, რომ $R^+(\vec{MP}) = \vec{MN}$) და R^- იყოს -60° -ით მობრუნება. (შევნიშნოთ, რომ $R^+(R^+(\vec{v})) = -R^-(\vec{v})$, ანუ ვექტორის 120° -იანი მობრუნება იგივეა რაც -60° -ით მობრუნების მოპირდაპირე). $\vec{a} := \vec{AB}$, $\vec{b} := \vec{BC}$ და $\vec{c} := \vec{AC}$. ცხადია $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.



ვინაიდან M არის AC_1B ტოლგვერდა სამკუთხედის ცენტრი $\vec{AM} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC_1}) = \frac{1}{3}(\vec{a} + R^+(\vec{a}))$. ანალოგიურად $\vec{AP} = \frac{1}{3}(\vec{AC} + \vec{AB_1}) = \frac{1}{3}(\vec{c} + R^-(\vec{c}))$, $\vec{BM} = \frac{1}{3}(\vec{BA} + \vec{BC_1}) = \frac{1}{3}(-\vec{a} + R^-(\vec{a})) = \frac{1}{3}(-\vec{a} - R^+(\vec{a}))$ და $\vec{BN} = \frac{1}{3}(\vec{BC} + \vec{BA_1}) = \frac{1}{3}(\vec{b} + R^+(\vec{b}))$. ჩასმით ვღებულობთ $\vec{MP} = \vec{MA} + \vec{AP} = \frac{1}{3}(-\vec{a} - R^+(\vec{a}) + \vec{c} + R^-(\vec{c})) = \frac{1}{3}(\vec{b} - R^+(\vec{a}) + R^-(\vec{a}) + R^-(\vec{b}))$ და $\vec{MN} = \vec{MB} + \vec{BN} = \frac{1}{3}(\vec{a} + R^-(\vec{a}) + \vec{b} + R^+(\vec{b}))$. ე.ი. $R^+(\vec{MP}) = \frac{1}{3}(R^+(\vec{b}) - R^+(R^+(\vec{a})) + \vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{3}(R^+(\vec{b}) + R^-(\vec{a}) + \vec{a} + \vec{b}) = \vec{MN}$. რ.დ.გ.

ვექტორული სივრცეები.

როგორც შესავალში უკვე აღვნიშნეთ, ვექტორის ცნება მნიშვნელოვან როლს თამაშობს მათემატიკაში. ეს როლი კიდევ უფრო მნიშვნელოვან ხასიათს იძენს ისტორიულ რეტროსპექტივაში, თუკი მათემატიკის განვითარებას გადავავლებთ თვალს, რამდენადაც ვექტორის ცნების აბსტრაგირებით მოხერხდა თანამედროვე მათემატიკის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი დარგის, წრფივი ალგებრის შექმნა. წრფივი ალგებრის შესწავლის ობიექტია აბსტრაქტული ვექტორების სივრცე (სიმრავლე). ეს იმგვარი „ვექტორებია“, რომელთა შინაგანი ბუნება დავიწყებულია და მათზე ჩასატარებელი შესაძლო ოპერაციების თვისებებია წინა პლანზე წამოწეული. ე.ი. ვექტორული სივრცე (იგივე წრფივი სივრცე) ეს არის რაიმე V სიმრავლე (კონკრეტულად რა ელემენტებისგან შედგება ეს სიმრავლე არ გვაინტერესებს, ჩვენ უბრალოდ მის ელემენტებს ვუწოდებთ ვექტორებს), რომლის ელემენტებსაც აქვთ ის თვისება, რომ ისინი შეიძლება ერთმანეთთან შევკრიბოთ, ან რიცხვზე გავამრავლოთ. ძირითადი ამ განმარტებაში არის ის, რომ სავალდებულო არ არის ეს ოპერაციები რაიმე კონკრეტული წესით იყოს განსაზღვრული. მთავარია ჩვენ მხოლოდ ვიცოდეთ რომ V -ს ნებისმიერი ორი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ელემენტისთვის არსებობს მესამე $\vec{c}$ ელემენტი, რომელსაც ეწოდება მათი ჯამი, $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, და აგრეთვე ნებისმიერი r რიცხვისთვის არსებობს ვექტორისა და სკალარის ნამრავლი $r \cdot \vec{a}$. ეს ოპერაციები არ არის ჩვეულებრივი შეკრება ან გამრავლება, რასაც აქამდე რიცხვებისთვის ან ჩვეულებრივი ვექტორებისთვის ვიყენებდით. ეს არის აბსტრაქტული ოპერაციები, რომლებსაც უნდა შევხედოთ როგორც ორი ცვლადის ფუნქციებს (იხილე სტატია „ფუნქციები“, ბოლო ქვეთავი). ამ ოპერაციებს მოეთხოვებათ ჰქონდეთ გარკვეული თვისებები, სწორედ ის ძირითადი თვისებები რაც ბუნებრივად ჰქონდათ ჩვეულებრივ ვექტორებს. კერძოდ:

(შეკრების კომუტაციურობა და ასოციაციურობა) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$; $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;

(ნულოვანი ვექტორის და მოპირდაპირის არსებობა) არსებობს $\vec{0} \in V$, რომელსაც ჰქვია

ნულოვანი ვექტორი ისეთი რომ $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ ყოველი $\vec{a}$ -თვის V -დან და ყოველი $\vec{a}$ -თვის V -დან არსებობს მისი მოპირდაპირე ელემენტი, რომელიც აღინიშნება $-\vec{a}$ -თი, ისეთი რომ $-\vec{a} + \vec{a} = \vec{0}$;

(სკალარზე გამრავლების დისტრიბუციულობა ვექტორთა შეკრების მიმართ) $r(\vec{a} + \vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b}$;

(სკალარზე გამრავლების დისტრიბუციულობა რიცხვების შეკრების მიმართ) $(r + s)\vec{a} = r\vec{a} + s\vec{a}$;

(სკალარზე გამრავლების შეთანხმებულობა რიცხვების ნამრავლთან) $r(s\vec{a}) = (rs)\vec{a}$;

(ერთიანზე ნამრავლის თვისება) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

რადგან ჩვენ უშუალოდ მოვითხოვთ აღნიშნული ოპერაციებისგან ამ თვისებების ქონას და არ ვამტკიცებთ მათ სამართლიანობას, ამიტომ ამ თვისებებს აქსიომებს ვუწოდებთ. მხოლოდ ამ აქსიომებზე დაყრდნობით, აიგება წრფივი სივრცეების საინტერესო და ელემენტური თეორია, რომელიც თავის მხრივ საფუძვლად უდევს მათემატიკის სხვადასხვა განშტოებებს.

საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ წრფივი სივრცის რაიმე მარტივი ნიმუში. მაგალითად V იყოს $[0; 1]$ -ზე განსაზღვრული ფუნქციების სიმრავლე. საჭირო ოპერაციები ამ სიმრავლეში შემოვიტანოთ სრულიად ბუნებრივად: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ და $(r \cdot$

$f)(x) = r \cdot f(x)$. ცხადია ეს ოპერაციები დააკმაყოფილებენ ზემოაღნიშნულ აქსიომებს და V გამოვა წრფივი სივრცე. ამ თვალსაზრისით ჩვეულებრივი ფუნქციები გვევლინებიან ვექტორებად, რაც მთლიანი სტატიის ფონზე, სადაც ვექტორის შესახებ მხოლოდ გეომეტრიულ წარმოდგენებს ვანვითარებდით, საკმაოდ უცნაურად გამოიყურება.

საზოგადოდ, უკანასკნელი პარაგრაფი წინამდებარე სტატიას მეტწილად მათემატიკაში არსებული აბსტრაგირებების საილუსტრაციოდ დავურთეთ. როგორც წესი აბსტრაქციის მიმართულებით ერთიდაიგივე სქემას მივყვებით. ჯერ გვაქვს რაღაც ობიექტები, რომელთა თვისებებიც შეისწავლება. შემდეგ „ვივიწყებთ“ ამ კონკრეტულ ობიექტებს და მხოლოდ მათი თვისებების წინა პლანზე წამოწევით და ამ თვისებებზე დაყრდნობით აღმოვაჩენთ ან ვქმნით ამავე თვისებების მექანე ახალ შედარებით აბსტრაქტულ ობიექტებს. ამ გზით საგნებიდან, მათი რაოდენობის გამომხატავი სიდიდეების თვისებების შენარჩუნებით გადავდით რიცხვებზე, რიცხვებიდან --- ცვლადებზე, ცვლადებიდან --- *ჯგუფისა* თუ *ველის* ელემენტებზე (ვისთვისაც ცნობილია ეს მათემატიკური ტერმინები). იგივე გავაკეთოთ ჩვეულებრივი ვექტორებიდან წრფივი სივრცის ვექტორებზე გადასვლისას.

დასასრულს, ჩვენ განვსაზღვრავთ წრფივი ასახვის ცნებას, რომელსაც ფართო გამოყენება აქვს წრფივ ალგებრაში და რომელიც რამოდენიმეჯერ შეგხვდა სხვადასხვა ადგილას სტატიაში (იხ. §8 და §10). ვთქვათ გვაქვს ორი წრფივი სივრცე V და W და რაიმე F ასახვა მათ შორის $F: V \rightarrow W$. ვიტყვით, რომ F არის *წრფივი ასახვა* თუკი სრულდება შემდეგი ორი პირობა:

$$\begin{aligned} 1) F(\vec{a} + \vec{b}) &= F(\vec{a}) + F(\vec{b}) \\ 2) F(r \cdot \vec{a}) &= r \cdot F(\vec{a}) \end{aligned}$$

(შენიშნოთ, რომ ტოლობის სხვადასხვა მხარეს აღებული ერთიდაიგივე ნიშნები შეკრებისა და სკალარზე გამრავლების, საზოგადოდ სხვადასხვა ოპერაციებს წარმოადგენენ, რადგან ისინი სხვადასხვა სივრცეშია აღებული. კერძოდ პირველი ოპერაცია V სივრცეშია განმარტებული, ხოლო მეორე --- W -ში.) წრფივი ასახვა არ არის იგივე *წრფივი ფუნქცია*, როგორც ამ ტერმინს სკოლაში ვხმარობთ. სკოლაში წრფივ ფუნქციას ვეძახით ისეთ ფუნქციას, რომლის გრაფიკიც წრფეა : $f(x) = kx + b$. ამგვარი ფუნქცია რომ იყოს წრფივი ზემოაღნიშნული თვალსაზრისით b უნდა იყოს 0. ანუ წრფე უნდა იყოს სათავეზე გამავალი (შეამოწმეთ!).